UNIVERSITY OF HAWAII PERIODICAL
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE.
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

53. BAND, 1. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM APRIL 1949)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1949

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

53. Band/1. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Gröbner, W. Über die Syzygientheorie der Polynomideale 1

Petersson, H. Über die Transformationsfaktoren der relativen Invarianten linearer Substitutionsgruppen 17

Mayer, W. The linear mappings of the E_n into itself 42

Schmetterer, L. Zur Fourierentwicklung des Produktes zweier Funktionen . . . 53

Wunderlich, W. Ein Spiegelproblem 63

Buchbesprechungen 73

Über die Syzygientheorie der Polynomideale.

Von
W. Gröbner, Innsbruck.

(Eingelangt am 14. Mai 1948.)

In einer für die Theorie der Polynomideale grundlegenden Arbeit[1] hat *David Hilbert* die Sätze von der „Endlichkeit der Formen in einem beliebigen Formensystem" und von der „Endlichkeit der Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme" bewiesen, aus welchen er die Darstellung der „charakteristischen Funktion eines Moduls", die später den Namen „*Hilbertfunktion*" erhalten hat[2], ableitete. Der erste dieser Sätze[3] hat unter dem Namen *Hilbertscher Basissatz* die ihm gebührende zentrale Stellung im Aufbau der Theorie der Polynomideale erhalten[4], dagegen ist der zweite Satz[5] noch kaum in diese Theorie eingeordnet und ausgewertet worden, weil seine Darstellung und sein Beweis kompliziert ist und weil sich für die Ableitung der Hilbertfunktion ein sehr viel bequemerer Weg gefunden hat[6].

In der vorliegenden Arbeit soll zunächst für diesen Satz ein neuer, vereinfachter Beweis mitgeteilt werden; gleichzeitig ergeben sich einige weitere Sätze und Verschärfungen, welche erst seine weitreichende Bedeutung für die Theorie der Polynomideale und für die algebraische Geometrie ins rechte Licht stellen. Vor allem gelingt es dabei auch die von *Macaulay* eingeführten *perfekten* Ideale[7] in einfachster Weise als diejenigen Ideale zu charakterisieren, deren Syzygienkette die kleinstmögliche Länge aufweist. Die Deutung dieser Begriffe in der algebraischen Geometrie gibt Veranlassung, den Begriff „perfekt" auch auf algebraische Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Schon die Untersuchung der einfachsten Fälle algebraischer Raumkurven lehrt, daß die Unterscheidung

[1] [1] (Siehe Literaturverzeichnis).
[2] [8] S. 41.
[3] [1] S. 474, Theorem I und S. 485, Theorem II.
[4] [5] 2. Bd., S. 23; [8] S. 2.
[5] [1] S. 492, Theorem III.
[6] [4], [8] S. 41f., [11] § 4.
[7] [2] S. 98, [3] S. 41f.

von „perfekten" und „imperfekten" algebraischen Mannigfaltigkeiten eine sehr anschauliche Bedeutung besitzt und daher auch für den geometrischen Standpunkt wohl begründet erscheint. Dies beruht in erster Linie auf der Tatsache, daß bei perfekten algebraischen Mannigfaltigkeiten (und im allgemeinen nur bei diesen) die bekannten Sätze über Dimension und Ordnung der Schnittmannigfaltigkeiten ohne Einschränkung auch unter Zugrundelegung des einfachen idealtheoretischen Multiplizitätsbegriffes gelten. Daher dürfte die konsequente Einführung dieses Macaulayschen Begriffes in der algebraischen Geometrie als ein verheißungsvoller Fortschritt zu werten sein.

1. Matrizen und Vektormoduln.

Wir gehen von einer Matrix $U_{rs} = (\varphi_{ik})$ aus, welche r Zeilen und s Spalten besitzt, und deren Elemente φ_{ik} homogene Formen eines Polynombereiches $K\,[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ der Grade μ_{ik} sind. K bedeutet einen beliebigen Körper. Wir verlangen, daß jede Unterdeterminante von U_{rs} homogen sei; dafür ist, wie man leicht sieht, das Bestehen der Gleichungen

$$\mu_{ik} = \mu_{i1} + \mu_{1k} - \mu_{11}, \quad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, s) \tag{1}$$

notwendig und hinreichend, sodaß mit den Gradzahlen der ersten Zeile und Spalte alle übrigen bestimmt sind. Es kann vorkommen, daß zufolge (1) eine Gradzahl $\mu_{ik} < 0$ ist; dann soll aber die entsprechende Form φ_{ik} identisch verschwinden. Eine derartige Matrix bezeichnen wir kurz als *homogen*.

Eine Matrix U_{rs}, welche nur eine Zeile oder eine Spalte enthält ($r = 1,\ s > 1$ oder $r > 1,\ s = 1$), nennen wir auch einen *Zeilenvektor*, bzw. *Spaltenvektor*.

Für das Rechnen mit Matrizen gelten die bekannten Regeln, wobei wir immer nur solche Operationen zulassen wollen, deren Resultat wieder eine *homogene* Matrix ist.

Eine Menge $\mathfrak{M}$ von (Zeilen- oder Spalten-) Vektoren gleicher Komponentenzahl s, welche die Moduleigenschaften erfüllt, nennen wir einen *Vektormodul*. Ein Vektormodul ist demnach durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

a) Die Gradzahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ der Komponenten irgend eines Vektors unterscheiden sich von denjenigen $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_s'$ eines andern Vektors desselben Moduls nur um eine additive Konstante: $\mu_j' = \mu_j + d$ ($j = 1, \ldots, s$; d ganz rational);

b) gleichzeitig mit $V = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ ist auch jeder Vektor $\psi V = (\psi\varphi_1, \ldots, \psi\varphi_s)$ in $\mathfrak{M}$ enthalten, wobei ψ eine beliebige Form (oder Konstante) aus $K[x_0, \ldots, x_n]$ bedeutet;

c) sind V_1 und V_2 zwei Vektoren gleicher Gradzahlen in $\mathfrak{M}$, so liegt auch der Vektor $V_1 - V_2$ in $\mathfrak{M}$.

In einfacher Weise (durch Schluß von s auf $s + 1$) beweist man den Hilbertschen Basissatz[8]:

Satz 1. Jeder Vektormodul besitzt eine endliche Basis.

Wenn wir die Basisvektoren unter einander (bzw. neben einander bei Spaltenvektoren) schreiben, so erhalten wir eine homogene Matrix U_{rs}; multiplizieren wir U_{rs} links mit einem beliebigen Zeilenvektor (bzw. rechts mit einem Spaltenvektor), dessen Gradzahlen so gewählt sind, daß das Resultat wieder homogen wird, so erhalten wir einen Vektor des Moduls $\mathfrak{M}$ und umgekehrt können wir jeden Vektor aus $\mathfrak{M}$ auf diese Weise darstellen.

Gehen wir von einer vorgegebenen homogenen Matrix U_{rs} aus, so können wir sie immer auf zweierlei Weisen als Basis eines Vektormoduls auffassen, nämlich sowohl hinsichtlich der Zeilen, wie auch der Spalten.

Alle Vektoren V_{s1}, welche eine gegebene homogene Matrix U_{rs} annullieren:

$$U_{rs}\ V_{s1} = 0,$$

bilden, wie man sieht, einen Vektormodul[9] (analog bei linksseitiger Multiplikation). Hat U_{rs} den Rang s, so besteht er nur aus dem Nullvektor. Wir nennen V_{s1} eine (rechte) *Syzygie*[10] der Matrix U_{rs}, den aus allen Syzygien gebildeten Vektormodul den (rechten) *Syzygienmodul* von U_{rs}. Seine Basis liefert eine homogene Matrix V_{st}, welche U_{rs} annulliert:

$$U_{rs}\ V_{st} = 0$$

und so beschaffen ist, daß jede Syzygie in der eben beschriebenen Weise durch Multiplikation von V_{st} mit einem Spaltenvektor W_{t1} dargestellt werden kann.

---

[8] Vgl. etwa [11] **151.9**.

[9] Wir werden immer voraussetzen, daß die Spalten von U_{rs} eine *Minimalbasis* bilden, d. h. daß keine Spalte durch die übrigen linear dargestellt werden kann; dann kann eine Syzygie V_{s1} niemals eine Komponente enthalten, welche eine von null verschiedene Konstante ist.

[10] Der Name „Syzygie" wurde ursprünglich in der Invariantentheorie für Relationen zwischen Invarianten verwendet. Jedoch hat sich dieser Name im obigen allgemeinen Sinn schon eingebürgert, vgl. [8] S. 40.

2. Syzygienketten.

Ist eine homogene Matrix $U_{s_0 s_1}$ unseres Polynombereiches $K[x_0, \ldots, x_n]$ gegeben, so können wir nach dem Vorausgehenden den (rechten) Syzygienmodul bilden; besteht er nur aus dem Nullvektor, so sagen wir kurz, die Matrix besitze keinen (rechten) Syzygienmodul. Im andern Fall denken wir eine Minimalbasis des Syzygienmoduls bestimmt und in einer Matrix $U^2_{s_1 s_2}$ mit s_1 Zeilen und s_2 Spalten angeordnet. Zu $U^2_{s_1 s_2}$ können wir in gleicher Weise den Syzygienmodul bestimmen mittels einer Matrix $U^3_{s_2 s_3}$ usw., bis wir zu einer Matrix gelangen, deren rechter Syzygienmodul nur aus dem Nullvektor besteht. Die Tatsache, daß dieser Fall immer, und zwar längstens nach $n+1$ Schritten eintritt, werden wir im folgenden beweisen. Wir erhalten auf diese Weise eine Kette von Matrizen

$$U^1_{s_0 s_1},\ U^2_{s_1 s_2},\ \ldots,\ U^k_{s_{k-1} s_k}, \tag{1}$$

von denen jede den rechten Syzygienmodul der vorhergehenden erzeugt (mit Ausnahme der ersten).

Bedeutet σ_i den Rang der Matrix U^i,[11] so gilt nach bekannten Sätzen der Matrizenrechnung:

$$\sigma_2 = s_1 - \sigma_1,\ \sigma_3 = s_2 - \sigma_2 = s_2 - s_1 + \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_k = s_{k-1} - \sigma_k,\ s_k = \sigma_k$$

woraus folgt

$$s_0 - s_1 + s_2 - + \ldots \pm s_k = 0. \tag{2}$$

Als Ausgangsmatrix werden wir gewöhnlich eine einzeilige Matrix ($s_0 = 1,\ s_1 = s$) wählen:

$$U^1_{1,s} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s),$$

welche die Basis eines zu untersuchenden H-Ideals[12] bildet. Die Reihe der daran schließenden Syzygienmoduln (1) nennen wir die Syzygienkette dieses H-Ideals.

Die praktische Bestimmung der einzelnen Syzygienmoduln ist immer in endlich vielen Schritten erreichbar, aber sie kann in konkreten Fällen sehr langwierig sein. Daher ist es vorteilhaft, sie in der folgenden Weise rekursiv durchführen zu können. Wir nehmen an, das H-Ideal $\mathfrak{a}$ mit der Basis

$$U^1_{1\,s} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$$

[11] Wir lassen bei den Matrizen die unteren Indizes, wo sie für das Verständnis nicht notwendig sind, der Einfachheit halber oft weg.

[12] H-Ideal = homogenes Ideal, vgl. [8] S. 39.

habe die bereits berechnete Syzygienkette

$$U^1_{1\,s},\ U^2_{s\,s_2},\ \ldots,\ U^k_{s_{k-1}\,s_k}$$

und $\varphi = \varphi_{s+1}$ sei eine zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form $(\mathfrak{a}:\varphi = \mathfrak{a})$. Dann besitzt das Ideal $b = (\mathfrak{a}, \varphi)$ die Syzygienkette

$$V^1_{1\,\sigma},\ V^2_{\sigma,\,\sigma_2},\ \ldots,\ V^{k+1}_{\sigma_k\,\sigma_{k+1}},$$

deren einzelne Glieder folgende Gestalten haben:

$$V^1 = (U^1, \varphi) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{s+1}), \tag{3_1}$$

$$V^2 = \left(\begin{array}{c|c} U^2 & -\varphi E \\ \hline 0 & U^1 \end{array}\right), \tag{3_2}$$

allgemein[13]

$$V^i = \left(\begin{array}{c|c} U^i & (-1)^{i-1}\varphi E \\ \hline 0 & U^{i-1} \end{array}\right),\ i = 2, \ldots, k \tag{3_i}$$

$$V^{k+1} = \left(\begin{array}{c} (-1)^k \varphi E \\ \hline U^k \end{array}\right). \tag{3_k}$$

Die Richtigkeit dieser Darstellungen bestätigt man durch die Überlegung, daß nicht nur $V^i\ V^{i+1} = 0$ ist, sondern auch jede Syzygie von V^i durch die Basis V^{i+1} dargestellt werden kann. Eine Syzygie von V^1 muß nämlich wegen $\mathfrak{a}:\varphi = \mathfrak{a}$ als letzte Komponente eine Form aufweisen, welche in $\mathfrak{a}$ enthalten ist; diese kann mit Hilfe der letzten Spalten von V^2 auf 0 reduziert werden; der Rest ist eine Syzygie von U^1, kann also durch die ersten Spalten von V^2 dargestellt werden. Ähnliche Überlegungen gelten für die andern Formeln (3_i) und (3_k).

Die Zeilen- und Spaltenzahlen der Kette $V^1, \ldots, V^{k+1}$ sind der Reihe nach:

$$\sigma = s + 1,\ \sigma_2 = s_1 + s_2,\ \ldots,\ \sigma_i = s_{i-1} + s_i,\ \ldots,\ \sigma_{k+1} = s_k. \tag{4}$$

Als wichtigstes Ergebnis merken wir den Satz an:

Satz 2. Hat die Syzygienkette eines H-Ideals $\mathfrak{a}$ genau k Glieder und ist φ eine zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form, so besitzt das H-Ideal $(\mathfrak{a}, \varphi)$ eine Syzygienkette von genau $k + 1$ Gliedern.

Nach *Macaulay*[14] nennen wir „Ideale der Hauptklasse" diejenigen H-Ideale des Polynomringes $K[x_0, \ldots, x_n]$, deren Basiszahl s gleich ihrem Rang (Dimensionsdefekt)[15] sind. Gehört $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ zur

---

[13] E bedeutet immer eine Einheitsmatrix, 0 eine Nullmatrix.

[14] [2] S. 48.

[15] [8] S. 7.

Hauptklasse, so auch $(\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$ $(t < s)$ und es ist immer $(\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$: $\varphi_{t+1} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_t)$[16]. Daher können wir sagen:

Satz 3. Ein H-Ideal $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ *der Hauptklasse besitzt eine aus k Gliedern bestehende Syzygienkette* $U^1, U^2, \ldots, U_k$, *deren Zeilen- und Spaltenzahlen der Reihe nach* $1, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \ldots, \binom{k}{k-1}, 1$ *sind.*

Das gilt nämlich für ein Hauptideal $\mathfrak{a} = (\varphi)$, dessen Syzygienkette aus dem einzigen Glied $U^1_{11} = (\varphi)$ besteht. Die Syzygienkette eines H-Ideals $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \varphi_2)$ der 2. Hauptklasse ist:

$$U^1_{12} = (\varphi_1, \varphi_2,), \; U^2_{21} = \binom{-\varphi_2}{\varphi_1};$$

diejenige eines solchen der 3. Hauptklasse:

$$U^1_{13} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \; U^2_{33} = \begin{vmatrix} -\varphi_2 & -\varphi_3 & 0 \\ \varphi_1 & 0 & -\varphi_3 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}, \quad U^3_{31} = \begin{vmatrix} \varphi_3 \\ -\varphi_2 \\ \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe der Formeln (3) können die Syzygienketten von H-Idealen höherer Hauptklassen sukzessive angeschrieben werden. Aus der Symmetrie der Kette schließt man, daß jede Matrix U_i nicht nur den rechten Syzygienmodul der linksstehenden, sondern auch den linken Syzygienmodul der rechtsstehenden erzeugt. Es zeigt sich hier, daß die Länge der Syzygienkette genau mit dem Rang (Dimensionsdefekt) des Hauptklassenideals übereinstimmt; dieser merkwürdige Zusammenhang wird durch den folgenden Satz allgemeiner beleuchtet:

Satz 4. Besitzt das H-Ideal $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ *eine Primärkomponente des Ranges k, so hat seine Syzygienkette wenigstens k-Glieder.* Dabei ist es gleichgültig, ob es sich um eine isolierte oder eingebettete Primärkomponente handelt[17].

Beweis: Es sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal des Ranges k, $\mathfrak{p} = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$: Φ eine Primbasis[18] von $\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{b} = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ ein Hauptklassenideal, welches die isolierte Komponente $\mathfrak{p}$ besitzt, so daß $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ ist. Es gibt also eine nicht in $\mathfrak{a}$ enthaltene Form ψ, welche $\psi\,\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ erfüllt. Nun sei

$$U^1_{1\,k}, \; U^2_{k\,k_2}, \; \ldots, \; U^k_{k1}$$

die Syzygienkette des Hauptklassenideals $\mathfrak{b}$,

$$V^1_{1s}, \; V^2_{s\,s_2}, \; \ldots, \; V^\sigma_{s_{\sigma-1}\,s_\sigma}$$

---

[16] [11] **135.4.**
[17] [11] **126.15.**
[18] [9] S. 336, Satz 3.

diejenige des Ideals $\mathfrak{a}$. Die Relation $\psi\, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ lautet in Matrizen geschrieben:

$$\psi\ U^1_{1\,k} = V^1_{1\,s}\ A^1_{s\,k}, \tag{5}$$

wo $A^1_{s\,k}$ eine homogene Matrix mit s Zeilen und k Spalten bedeutet. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung rechts mit U^2, so folgt (mit Unterdrückung der unteren Indizes)

$$0 = V^1\, A^1\, U^2.$$

Daher muß $A^1\, U^2$ im rechten Syzygienmodul von V^1, d. i. in V^2 enthalten sein, d. h. es muß

$$A^1\, U^2 = V^2\, A^2$$

gelten, wo A^2 eine neue Matrix mit s_2 Zeilen und k_2 Spalten ist. Diese Gleichung multiplizieren wir mit U^3 und folgern auf dieselbe Weise

$$A^2\, U^3 = V^3\, A^3$$

usw. Wäre nun $\sigma < k$, so hätte man $V^{\sigma+1} = 0$ zu setzen und erhielte:

$$A^\sigma\, U^{\sigma+1} = 0$$

also wegen der oben bemerkten besonderen Symmetrie der Kette der U_i:

$$A^\sigma = B^\sigma\, U^\sigma$$

mit einer Matrix B^σ von s_σ Zeilen und $k_{\sigma-1}$ Spalten. Setzt man dies in

$$A^{\sigma-1}\, U^\sigma = V^\sigma\, A^\sigma$$

ein und bringt alles auf die linke Seite, so kann man schreiben:

$$(A^{\sigma-1} - V^\sigma\, B^\sigma)\, U^\sigma = 0.$$

Daraus können wir wieder auf eine Darstellung

$$A^{\sigma-1} = V^\sigma\, B^\sigma + B^{\sigma-1}\, U^{\sigma-1}$$

schließen und dies in $A^{\sigma-2}\, U^{\sigma-1} = V^{\sigma-1}\, A^{\sigma-1}$ einsetzen; das gibt wegen $V^{\sigma-1}\, V^\sigma = 0$

$$(A^{\sigma-2} - V^{\sigma-1}\, B^{\sigma-1})\, U^{\sigma-1} = 0$$

also $$A^{\sigma-2} = V^{\sigma-1}\, B^{\sigma-1} + B^{\sigma-2}\, U^{\sigma-2}$$ usw.

Schließlich erhalten wir eine Gleichung

$$A^1 = V^2\, B^2 + B^1\, U^1,$$

also wegen (5) $$\psi\, U^1 = V^1\, B^1\, U^1,$$

woraus $\psi = V^1\, B^1$, d. h. $\psi \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ im Widerspruch mit der Voraussetzung folgt. Es muß also $\sigma \geqslant k$ sein, w. z. b. w.

Tieferen Einblick in die Struktur der Syzygienmoduln vermittelt der folgende Satz:

Satz 5. Ist S eine Syzygie aus dem k-ten Syzygienmodul U^k, die man folgendermaßen aufspalten kann

$$S = \varphi_1 S_1 + \varphi_2 S_2 + \ldots + \varphi_j S_j, \tag{6}$$

wo $(\varphi_1, \ldots, \varphi_j)$ ein Ideal der Hauptklasse ist, so können, falls $j < k$ ist, die Vektoren $S_1, \ldots, S_j$ in (6) immer so gewählt werden, daß sie ebenfalls Syzygien des Moduls U^k sind. In diesem Fall kann die Syzygie S nicht zur Basis des Syzygienmoduls gehören, also sicher keine Spalte der Matrix U^k sein. Eine Aufspaltung der Art (6) ist immer dann möglich, wenn das von den Elementen von S erzeugte H-Ideal in einem Hauptklassenideal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_j)$ enthalten ist. Das von irgendeiner Spalte von U^k erzeugte H-Ideal kann also in keinem Hauptklassenideal eines Ranges $< k$ enthalten sein.

Zum Beweise unseres Satzes bemerken wir, daß er jedenfalls für $j = 1$ richtig ist. Wir nehmen an, er sei bereits für alle Zahlen 1, 2, ..., j—1 bewiesen, und wollen nun seine Gültigkeit für j dartun. Wir multiplizieren (6) links mit U^{k-1} und erhalten wegen $U^{k-1} S = 0$

$$0 = \varphi_1 S_1' + \ldots + \varphi_j S_j'$$

mit $S_i' = U^{k-1} S_i$. Da $(\varphi_1, \ldots, \varphi_j)$ zur Hauptklasse gehört, folgt hieraus die Möglichkeit einer Darstellung:

$$S_j' = \varphi_1 S_1'' + \ldots + \varphi_{j-1} S_{j-1}''.$$

Nun gehört aber S_j' dem Syzygienmodul U^{k-1} an $(S_j' = U^{k-1} S_j)$, so daß wir hier unsere Induktionsvoraussetzung geltend machen können, d. h. wir dürfen die Vektoren S_i'' so gewählt denken, daß sie alle dem Syzygienmodul U^{k-1} angehören; dann gilt mit passenden Spaltenvektoren A_i

$$S_i'' = U^{k-1} A_i, \; i = 1, \ldots, j\text{—}1.$$

Setzen wir nun

$$\overline{S}_j = S_j - \varphi_1 A_1 - \ldots - \varphi_{j-1} A_{j-1}$$
$$\overline{S}_i = S_i + \varphi_i A_i, \quad i = 1, \ldots, j\text{—}1,$$

so geht (6) über in

$$S = \varphi_1 \overline{S}_1 + \varphi_2 \overline{S}_2 + \ldots + \varphi_j \overline{S}_j$$

und außerdem ist $\overline{S}_j$ eine Syzygie des Moduls U^k, weil $U^{k-1} \overline{S}_j = 0$ ist. Wenden wir also unsere Induktionsvoraussetzung noch einmal auf die Darstellung

$$S - \varphi_j \bar{S}_j = \varphi_1 \bar{S}_1 + \ldots + \varphi_{j-1} \bar{S}_{j-1}$$

an, so schließen wir, daß auch $\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_{j-1}$ dem Modul U^k angehörig gewählt werden können, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Eine einfache Folge dieses Satzes ist der Hilbertsche Satz vom „Abbrechen der Syzygienkette":

Satz 6: Jede Syzygienkette im Polynomring $K[x_0, \ldots, x_n]$ bricht spätestens nach dem $(n+1)$-ten Glied ab[19]. Würde nämlich ein Syzygienmodul U^{n+2} existieren, so wäre das durch eine Spalte dieser Matrix erzeugte H-Ideal im Hauptklassenideal $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ enthalten, was unmöglich ist.

Eine schärfere Fassung von Satz 4 ist nur im Fall $k = n + 1$ möglich, denn es gilt:

Satz 7. Ein H-Ideal $\mathfrak{a}$ in $K[x_0, \ldots, x_n]$, dessen Syzygienkette $n+1$ Glieder besitzt, hat eine triviale Komponente[20] *und umgekehrt.*

Wäre das nicht wahr, so gäbe es eine zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form φ derart, daß die Syzygienkette des Ideals $(\mathfrak{a}, \varphi)$ nach Satz 2 genau $n+2$ Glieder aufweisen müßte.

Aus diesen Sätzen geht hervor, daß die Länge der Syzygienkette eines H-Ideals in einer gewissen Abhängigkeit von der inneren Natur dieses Ideals steht; sie muß also jedenfalls unabhängig von der speziellen Basis des Ideals sein. Das kann man auch durch eine leichte Überlegung bestätigen; in der Tat hat eine Änderung der Basis des H-Ideals bereits keinen Einfluß mehr auf den dritten Syzygienmodul, während der zweite im wesentlichen nur eine Umordnung der Zeilen erfährt.

Die Syzygienkette eines H-Ideals $\mathfrak{a}$ steht in engem Zusammenhang mit seiner *Hilbertfunktion*. Bedeuten $\tau_{11}, \ldots, \tau_{1s}$ die Grade der Formen von $U^1_{1\,s}$, $\tau_{21}, \ldots, \tau_{2\,s_2}$ diejenigen der Formen der ersten Zeile von $U^2_{s\,s_2}$ usw., so folgt für die Hilbertfunktion die Darstellung:

$$H(t; \mathfrak{a}) = \binom{t+n}{n} - \sum_{i=1}^{s} \binom{t+n-\tau_{1i}}{n} + \sum_{i-1}^{s_2} \binom{t+n-\tau_{11}-\tau_{2i}}{n} - + \ldots \qquad (7)$$

---

[19] Dabei ist es unwesentlich, welches Anfangsglied die Kette besitzt, d. h. die Aussage ist keineswegs auf den für uns wichtigen Fall beschränkt, daß als Anfangsglied eine einzeilige Matrix steht.

[20] Eine zum Primideal $(x_0, \ldots, x_n)$ gehörige Primärkomponente bezeichnen wir als „triviale Komponente", vgl. [11] **124.10**, weil ihr keine Nullstelle im projektiven Raum entspricht.

3. Perfekte Ideale.

Die Sätze des vorausgehenden Abschnittes, insbesondere Satz 4, legen es nahe, diejenigen H-Ideale besonders zu untersuchen, deren Syzygienkette eine im Verhältnis zu ihrem Rang möglichst geringe Gliederzahl aufweist:

Definition: *Ein H-Ideal* $\mathfrak{a}$ *in* $K[x_0, \ldots, x_n]$ *des Ranges* r *(homogene Dimension* $n-r$*) heißt perfekt, wenn seine Syzygienkette genau* r *Glieder aufweist.*

Aus Satz 4 folgt, daß die Syzygienkette eines solchen Ideals mindestens r-Glieder haben muß, sie kann aber, wie wir durch Beispiele belegen werden, auch mehr als r-Glieder besitzen, und dies sogar auch dann, wenn $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist. Wir sind nach den vorausgehenden Entwicklungen imstande, einige Klassen von Idealen anszugeben, welche sicher perfekt sind:

Satz 8. Perfekt sind unter anderen: 1. Alle H-Ideale der Hauptklasse, insbesondere alle Hauptideale; 2. Alle H-Ideale des Ranges $n+1$ *(T-Ideale); 3. Alle ungemischten H-Ideale des Ranges* n *(homogener Dimension 0)*[21].

Die Aussage 1 folgt unmittelbar aus Satz 3, Aussage 2 aus Satz 4 und 6, Aussage 3 aus Satz 4 und 7. In der Ebene ($n = 2$) sind damit alle möglichen Fälle bereits erschöpft, so daß wir sagen können:

Satz 9. In $K[x_0, x_1, x_2]$ *ist jedes ungemischte Ideal perfekt.*

Ein gemischtes H-Ideal kann nicht perfekt sein, denn es enthält ja definitionsgemäß[22] mindestens eine Primärkomponente höheren Ranges als r und besitzt also gemäß Satz 4 eine Syzygienkette mit mehr als r-Gliedern; daher gilt:

Satz 10. Jedes perfekte H-Ideal ist ungemischt.

Es ist aber nicht jedes ungemischte H-Ideal perfekt, ja nicht einmal jedes Primideal, wie das folgende Beispiel zeigt. Das Primideal, dessen Basis

$$U_{14}^1 = (x_0^2 x_2 - x_1^3,\ x_0 x_3 - x_1 x_2,\ x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3,\ x_1 x_3^2 - x_2^3)$$

ist und dessen Nullstellengebilde eine rationale Raumkurve 4. Ordnung mit der Parameterdarstellung

$$x_0 = \lambda^4,\ x_1 = \lambda^3\mu,\ x_2 = \lambda\mu^3,\ x_3 = \mu^4$$

vorstellt, hat die Syzygienkette

[21] [2] S. 98.
[22] [11] **131.10**.

$$U_{44}^{2} = \begin{vmatrix} x_2 , & x_3 , & 0 , & 0 \\ -x_1^2 , & -x_0 x_2 , & x_1 x_3 , & x_2^2 \\ -x_0 , & -x_1 , & -x_2 , & -x_3 \\ 0 , & 0 , & -x_0 , & -x_1 \end{vmatrix}, \quad U_{41}^{3} = \begin{vmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ -x_0 \end{vmatrix},$$

ist also nicht perfekt.

Ist die Form φ relativ prim zum H-Ideal $\mathfrak{a}$, des Ranges r, so hat das Ideal $(\mathfrak{a}, \varphi)$ den Rang[23] $r + 1$; gleichzeitig hat aber auch die Syzygienkette nach Satz 2 um ein Glied zugenommen. Es ist also $\mathfrak{a}$ zugleich mit $(\mathfrak{a}, \varphi)$ perfekt oder nicht:

Satz 11. Ein H-Ideal $\mathfrak{a}$ des Ranges r in $K[x_0, \ldots, x_n]$ ist dann und nur dann perfekt, wenn entweder $r = n + 1$ ist oder $(\mathfrak{a}, \varphi)$ perfekt ist für eine (und folglich für jede) zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form φ.

Die geometrische Bedeutung dieses Satzes ist die, daß der Schnitt einer perfekten algebraischen Mannigfaltigkeit mit einer Hyperfläche, die sie nicht enthält, wieder perfekt ist und umgekehrt[24].

Dieses Kriterium für die Perfektheit eines H-Ideals zeigt, daß die obige Definition der perfekten H-Ideale in Übereinstimmung steht mit der ganz anders lautenden von *Macaulay*[25], besonders wenn wir den Satz 11 noch in folgender Form aussprechen:

Satz 11a. Ein H-Ideal $\mathfrak{a}$ der (homogenen) Dimension d ist dann und nur dann perfekt, wenn es möglich ist, die Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ derart anzugeben, daß $(\mathfrak{a}, \varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ ungemischt nulldimensional (und also perfekt) ist.

Die Bedeutung, welche der Begriff „perfekt" in der Idealtheorie der Polynomringe und damit auch in der algebraischen Geometrie gewinnt, beruht wesentlich auf dieser Eigenschaft, daß wir nur bei einem perfekten Ideal $\mathfrak{a}$ mit Sicherheit behaupten können, daß alle Ideale $(\mathfrak{a}, \varphi_1), (\mathfrak{a}, \varphi_1, \varphi_2), \ldots$ ungemischt sind, falls die Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ jeweils relativ prim oder auch nur so gewählt werden, daß der Rang immer um 1 zunimmt. Daher kann der *Bézout*sche Satz in seiner strengen Form auch nur für *perfekte* algebraische Mannigfaltigkeiten ausgesprochen werden, wenn man den idealtheoretischen Multiplizitätsbegriff zugrunde legt[26].

---

[23] Einen genauen Beweis dafür siehe [11] **133.15**.

[24] $(\mathfrak{a}, \varphi)$ ist als perfektes Ideal sicher ungemischt (Satz 10). Die Frage, ob bereits aus der Tatsache, daß $(\mathfrak{a}, \varphi)$ *ungemischt* ist für jede zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form φ, darauf geschlossen werden kann, daß $\mathfrak{a}$ perfekt ist, habe ich noch nicht beantworten können.

[25] [2] S. 86.

[26] Vgl. [11] **144**.

4. Perfekte algebraische Raumkurven.

In der Ebene ist jede algebraische Kurve, als Nullstellengebilde eines Hauptideals, perfekt, erst im dreidimensionalen Raum gibt es, wie das Beispiel des vorigen Abschnittes zeigt, nicht perfekte oder „imperfekte" Kurven. Daher sind die Raumkurven die einfachsten algebraischen Mannigfaltigkeiten, bei denen durch den Begriff „perfekt" eine besonders Klasse vor den andern ausgezeichnet wird. Eine perfekte Raumkurve wird durch ein H-Ideal $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ in $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ definiert, dessen Syzygienkette nach dem zweiten Glied abbricht. Der zweite (und letzte) Syzygienmodul U^2 hat die Zeilenzahl s, die Spaltenzahl s—1 (vgl. (2)) und den Rang s—1. Nach bekannten Sätzen über die Auflösung homogener linearer Gleichungssysteme sind die (s—1)-zeiligen Unterdeterminanten von U^2 bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor gleich den Basisformen $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$. Wir zeigen, daß dieser Proportionalitätsfaktor eine Konstante ($\neq 0$) ist. Wären nämlich alle diese Determinanten durch eine Form Φ positiven Grades teilbar, so könnte man die Formen $\psi_1, \ldots, \psi_{s-1}$ so bestimmen, daß sie nicht sämtlich durch Φ teilbar sind, und daß

$$\psi_1 S_1 + \ldots . + \psi_{s-1} S_{s-1} = \Phi S$$

wäre, wo S_i die Spalten von U^2 bedeuten, während S ein neuer Spaltenvektor ist, der ebenfalls dem Syzygienmodul U^2 angehören muß; also gilt

$$S = \chi_1 S_1 + \ldots + \chi_{s-1} S_{s-1}$$

mit gewissen Formen $\chi_1, \ldots, \chi_{s-1}$. Das gibt in die erste Gleichung eingesetzt:

$$(\psi_1 - \Phi\chi_1) S_1 + \ldots + (\psi_{s-1} - \Phi\chi_{s-1}) S_{s-1} = 0,$$

also, weil die Syzygienkette mit U^2 abbricht,

$$\psi_i = \Phi\chi_i \ , \ i = 1, \ldots, s\text{—}1$$

im Widerspruch damit, daß nicht alle ψ_i durch Φ teilbar sind.

Wir können also sagen, daß $\mathfrak{a}$ durch die (s—1)-zeiligen Unterdeterminanten der Matrix U^2 erzeugt wird, und, indem wir eine von *Macaulay* eingeführte Bezeichnung übernehmen, schreiben:

$$\mathfrak{a} = \left| U^2_{s,\, s-1} \right|.$$

Satz 12. *Jede perfekte algebraische Raumkurve (reduzibel oder irreduzibel) kann durch eine homogene Matrix*

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \varphi_{11}, \cdots, \varphi_{1,\,s+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{s1}, \cdots \cdot \varphi_{s,\,s+1} \end{vmatrix}$$

dargestellt werden, wo die φ_{ik} Formen aus $K\,[x_0, x_1, x_2, x_3]$ bedeuten, die positive Grade haben oder identisch verschwinden. Umgekehrt wird durch eine derartige Matrix eine perfekte algebraische Raumkurve definiert, wenn der GGT aller s-reihigen Determinanten 1 ist.

Der Fall $s = 1$ liefert die Hauptklassenideale $\mathfrak{a} = (\varphi_1, \varphi_2)$, also diejenigen Kurven, welche als vollständige Schnitte von zwei algebraischen Flächen gewonnen werden können. Ihre *Ordnung*[27], d. i. der erste Koeffizient h_0 ihrer Hilbertfunktion $H\,(t;\,\mathfrak{a}) = h_0\,t + h_1$, berechnet sich mit Hilfe der Formel (7): $h_0 = \mu_1\,\mu_2$, wo μ_1 und μ_2 die Grade der Formen φ_1 und φ_2 bedeuten.

Im Falle $s = 2$ bezeichnen wir die Grade der Formen der ersten Zeile mit μ_1, μ_2, μ_3, diejenigen der zweiten Zeile mit $\mu_1 + \nu$, $\mu_2 + \nu$, $\mu_3 + \nu$. Dann liefert (7) für die Ordnung der Kurve den Ausdruck

$$h_0 = \mu_1\,\mu_2 + \mu_2\,\mu_3 + \mu_3\,\mu_1 + \nu\,(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \nu^2.$$

Auf diese Art können also perfekte Raumkurven der Ordnungen 3, 5, 7 und aller folgenden gewonnen werden. Das Ergebnis für $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, $\nu = 0$, $h_0 = 3$ fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Satz 13. Das H-Ideal

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} u_1\,u_2\,u_3 \\ v_1\,v_2\,v_3 \end{vmatrix} = (u_2\,v_3 - u_3\,v_2,\; u_3\,v_1 - u_1\,v_3,\; u_1\,v_2 - u_2\,v_1),$$

wo die u_i und v_i Linearformen aus $K\,[x_0, x_1, x_2, x_3]$ bedeuten, stellt eine perfekte Raumkurve $\mathfrak{C}_3$ der Ordnung 3 dar und umgekehrt. Die $\mathfrak{C}_3$ ist Schnitt von drei Quadriken, von denen je zwei sich außer der $\mathfrak{C}_3$ noch in einer Sekante dieser Kurve schneiden. Die Menge aller Sekanten ist durch die Ideale

$$\mathfrak{s}_\lambda = (\lambda_1\,u_1 + \lambda_2\,u_2 + \lambda_3\,u_3,\; \lambda_1\,v_1 + \lambda_2\,v_2 + \lambda_3\,v_3),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ willkürliche Parameter sind, gegeben. Die $\mathfrak{C}_3$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn $\mathfrak{s}_\lambda$ für alle möglichen Parameterwerte den Rang 2 hat. Die rationale Nullstelle gewinnt man durch Auflösen der linearen Gleichungen

$$t_0\,u_1 + t_1\,v_1 = t_0\,u_2 + t_1\,v_2 = t_0\,u_3 + t_1\,v_3 = 0$$

---

[27] [11] **141.11.**

nach x_0, x_1, x_2, x_3. Die reduziblen perfekten Raumkurven 3. Ordnung zerfallen in einen Kegelschnitt und eine diesen in einem Punkte treffende Gerade.

Es ist interessant, die *imperfekten* Raumkurven 3. Ordnung gegenüberzustellen; das sind durchwegs zerfallende Kurven, und zwar entweder in einen (reduziblen oder irreduziblen) Kegelschnitt und eine ihn nicht treffende Gerade oder in drei paarweise windschiefe Geraden. Ein Beispiel für den ersten Fall liefert das Ideal

$$\mathfrak{a} = [(x_0, x_1 x_2 - x_3^2), (x_1, x_2)],$$

dessen Syzygienkette

$$U^1_{1,4} = (x_0 x_1, x_0 x_2, x_1^2 x_2 - x_1 x_3^2, x_1 x_2^2 - x_2 x_3^2),$$

$$U^2_{4,4} = \begin{vmatrix} x_2 & 0 & x_1 x_2 - x_3^2 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & x_1 x_2 - x_3^2 \\ 0 & x_2 & -x_0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & -x_0 \end{vmatrix}, \quad U^3_{4,1} = \begin{vmatrix} x_1 x_2 - x_3^2 \\ -x_0 \\ -x_2 \\ x_1 \end{vmatrix},$$

ist, für den zweiten Fall das Ideal

$$\mathfrak{a} = [(x_0, x_1), (x_2, x_3), (x_0, -x_3, x_1 - x_2)],$$

dessen Syzygienkette

$$U^1_{1,5} = (x_0 x_2 - x_1 x_3, x_0^2 x_2 - x_1 x_3^2, x_0^2 x_3 - x_0 x_3^2, x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2, x_0 x_1 x_2 - x_1 x_2 x_3)$$

$$U^2_{5,6} = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 x_2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_3^2 & 0 \\ -x_0 & -x_2 & 0 & -x_1 & -x_3 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & x_0 - x_3 \\ 0 & x_3 & -x_2 & x_0 & 0 & -x_1 + x_2 \end{vmatrix},$$

$$U_{5,2} = \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ -x_0 & -x_1 \\ 0 & x_0 - x_3 \\ x_3 & x_2 \\ -x_1 & 0 \\ 0 & -x_3 \end{vmatrix}$$

ist. Man erkennt hieraus, daß die perfekten Raumkurven 3. Ordnung zusammenhängende Gebilde sind, während die imperfekten in wenigstens zwei punktefremde Mannigfaltigkeiten zerfallen. Das kann allerdings nicht auf Raumkurven höherer Ordnung verallgemeinert werden, wie das in Abschnitt 3 gegebene Beispiel beweist, aber es zeigt, daß die Unterscheidung perfekter und imperfekter Raumkurven auch für den geometrischen Standpunkt eine sehr anschauliche Bedeutung besitzt.

Um perfekte und imperfekte Raumkurven geometrisch scharf zu unterscheiden, ziehen wir den berühmten „*Noetherschen Fundamentalsatz*" heran[28], der in der Ebene so lautet: *Schneiden sich die algebraischen Kurven* $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ *und* $g(x_0, x_1, x_2) = 0$ *in endlich vielen Punkten und geht die Kurve* $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ *durch jeden ihrer Schnittpunkte, die „Noetherschen Bedingungen" erfüllend, so gibt es zwei Formen* $\varphi(x_0, x_1, x_2)$ *und* $\psi(x_0, x_1, x_2)$, *welche die Identität*

$$F = \varphi f + \psi g$$

erfüllen. Wir können diesen Satz folgendermaßen auf Raumkurven übertragen:

Satz 14. Ist $\mathfrak{C}$ *eine perfekte Raumkurve, welche durch die Gleichungen*

$$f_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \ldots, f_s(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

definiert ist und $g(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ *eine beliebige algebraische Fläche, die* $\mathfrak{C}$ *in endlich vielen Punkten schneidet, so läßt sich jede Fläche* $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, *welche, die Noetherschen Bedingungen erfüllend*[29], *durch alle Schnittpunkte geht, darstellen:*

$$F = \varphi_1 f_1 + \ldots + \varphi_s f_s, + \varphi g,$$

wo $\varphi_1, \ldots, \varphi_s, \varphi$ *Formen der Variablen* x_0, x_1, x_2, x_3 *sind. Ist die Kurve* $\mathfrak{C}$ *nicht perfekt, so gilt das nicht, d. h. es läßt sich immer eine Fläche* $F = 0$ *angeben, welche alle Bedingungen erfüllt, ohne in der bezeichneten Weise darstellbar zu sein.*

Ist nämlich $\mathfrak{C}$ perfekt, so ist das H-Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_s, g)$ ungemischt nulldimensional, so daß die Noetherschen Bedingungen hinreichen, um $F \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ sicher zustellen; ist dagegen $\mathfrak{C}$ nicht perfekt, so besitzt $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente $\mathfrak{a}_t$, so daß $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_t]$ mit nulldimensionalem $\mathfrak{a}_0$ gilt. Das Erfülltsein der Noetherschen Bedingungen für die Form F sichert nur $F \equiv 0\ (\mathfrak{a}_0)$, und wegen $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}$ gibt es immer Formen F, für die $F \equiv 0\ (\mathfrak{a}_0)$, $F \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ gilt, so daß diese Formen die Noetherschen Bedingungen erfüllen, ohne in der angegebenen Weise darstellbar zu sein.

Die Ausdehnung des Noetherschen Fundamentalsatzes auf Raumkurven, und analog auf höhere algebraische Mannigfaltigkeiten, ist also erst nach Einführung des Begriffes „perfekt" möglich.

---

[28] [5] 2. Bd., S. 67ff.; [6] S. 206ff.

[29] Bei einfachen Schnittpunkten genügt die Bedingung, daß die Form $F(x)$ in diesem Punkte verschwinde.

Literatur.

[1] *D. Hilbert*, Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. **36** (1890), S. 473—539.

[2] *F. S. Macaulay*, The algebraic theory of modular systems, Cambridge 1916.

[3] *F. S. Macaulay*, Modern algebra and polynomial ideals, Proc. Cambridge Phil. Soc. **30** (1934), S. 27—46.

[4] *B. L. Waerden*, On Hilbert's function, Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam **31**/2 (1928).

[5] *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra, 2 Bde., Berlin 1930—31.

[6] *B. L. v. d. Waerden*, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939.

[7] *W. Krull*, Idealtheorie, Berlin 1935 (Ergebn. d. Math. u. i. Grenzgebiete).

[8] *W. Krull*, Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie, Enzykl. d. math. Wiss. I_1, 12, Leipzig 1939.

[9] *W. Gröbner*, Über eine neue idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie, Math. Ann. **118** (1938), S. 333—358.

[10] *W. Gröbner*, Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie, Leipzig 1941.

[11] *W. Gröbner*, Moderne algebraische Geometrie (Springer-Verlag, Wien, im Erscheinen).

Über die Transformationsfaktoren der relativen Invarianten linearer Substitutionsgruppen.

Von
Hans Petersson, Hamburg.

(Eingelangt am 20. Mai 1948.)

1. In der Theorie der automorphen Funktionen hat man bisher lediglich solche multiplikativen automorphen Transzendenten untersucht, welche sich bei Ausübung der Substitutionen

$$\tau' = L\,\tau = L(\tau) = \frac{\alpha\,\tau + \beta}{\gamma\,\tau + \delta} \quad \left(L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\ \tau = x + i\,y;\ x, y \text{ reell}\right) \tag{1}$$

der betreffenden Substitutionsgruppe $\overline{\Gamma}$ nach dem Funktionalgleichungen-System

$$f(L\,\tau) = v(L)\,(\gamma\,\tau + \delta)^r\,f(\tau) \tag{2}$$

transformieren. Hier bezeichnet r eine feste Zahl, die im allgemeinen ganz, häufig sogar gerade sein muß, in gewissen Fällen jedoch, z. B. bei den Grenzkreisgruppen mit parabolischen Substitutionen und der oberen τ-Halbebene als Grenzkreisinnerem, beliebig komplex gewählt werden kann; man nennt $-r$ die Dimension von $f(\tau)$. Der Faktor $v(L)$ hängt zwar von der Matrix L der Substitution (1), nicht aber von τ ab; man nennt diese $v(L)$ die Multiplikatoren von $f(\tau)$.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Frage, ob und in welchem Umfange es möglich ist, den Bereich der genannten Funktionen $f(\tau)$ so zu erweitern, daß dabei lediglich der multiplikative Charakter der Invarianzgleichungen (2) gewahrt bleibt. Es sollen also die Eigenschaften derjenigen Funktionen $f(\tau)$ untersucht werden, welche bei den linearen Transformationen (1) an Stelle von $v(L)\,(\gamma\,\tau + \delta)^r$ einen Faktor $R(\tau, L)$ aufnehmen, von dem nicht mehr vorausgesetzt wird, als daß er gewisse allgemeine Forderungen erfüllt.

Um zu einer konkreten Problemstellung zu gelangen, müssen wir zunächst die grundlegenden Begriffe präzisieren. Wir werden $R(\tau, L)$ als eine Funktion der Variabeln τ und der vier Substitutionskoeffizienten α, β, γ, δ aus (1) auffassen und annehmen, daß $L = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$

auf einer gewissen Matrizengruppe Γ variiert. Die Voraussetzungen, denen wir diese Matrizengruppen Γ unterwerfen, sind folgende: Jede Substitution (1) mit $L \subset \Gamma$ führe die obere Halbebene $\mathfrak{H}$ der komplexen Variabeln τ in sich über; demgemäß seien alle $L \subset \Gamma$ reell und alle Determinanten $|L|$ dieser L positiv. Die in der Theorie der automorphen Formen üblicherweise gestellte Bedingung $|L| = 1$ für $L \subset \Gamma$ verursacht keine Beschränkung der Allgemeinheit und vereinfacht die Untersuchung der automorphen Formen zweifellos, kann jedoch entbehrt werden. In der vorliegenden Abhandlung würde sie sich nachteilig auswirken, weshalb wir auf sie verzichten müssen.

Wir legen also eine Gruppe $\overline{\Gamma}$ von linearen Substitutionen (1) mit reellen L und $|L| = 1$ zu Grunde, verstehen unter Γ_0 die Gruppe aller derjenigen reellen Matrizen L mit $|L| > 0$, denen die sämtlichen Substitutionen von $\overline{\Gamma}$ und nur diese nach (1) entsprechen und nehmen an, daß $\overline{\Gamma}$ diskret sei, d. h. keine infinitesimalen Substitutionen enthalte. Nach einem Fundamentalsatz von Poincaré ist $\overline{\Gamma}$ in $\mathfrak{H}$ eigentlich diskontinuierlich.

Die Funktionalgleichung (2) erhält, wenn sie ursprünglich unter der Bedingung $|L| = 1$ vorgelegt ist, für $|L| > 0$ die Gestalt

$$\begin{gathered} f(L\tau) = v^*(L)\,(\gamma\tau+\delta)^r f(\tau) \quad \left(L = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \subset \Gamma_0,\ \tau \subset \mathfrak{H}\right), \\ v^*(L) = v(|L|^{-\frac{1}{2}} L)\,|L|^{-\frac{r}{2}} \quad (|L| = \operatorname{Det} L = \alpha\delta - \beta\gamma > 0). \end{gathered} \tag{3}$$

Wenn eine in $\mathfrak{H}$ eindeutige, bis auf isolierte Singularitäten reguläre und nicht identisch verschwindende analytische Funktion $g(\tau)$ den Transformationsgleichungen

$$g(L\tau) = R(\tau, L)\, g(\tau) \quad (L \subset \Gamma_0) \tag{4}$$

genügt, so bestehen die Relationen

$$R(\tau, \lambda L) = R(\tau, L) \quad (\lambda \text{ reell}, L \subset \Gamma_0),\ R(\tau, I) = 1 \quad \left(I = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right) \tag{5}$$

$$R(L_2\tau, L_1)\, R(\tau, L_2) = R(\tau, L_1 L_2) \quad (L_1, L_2 \subset \Gamma_0). \tag{6}$$

Sie sind für

$$R(\tau, L) = R_{0,r}(\tau, L) \equiv |L|^{-\frac{r}{2}} (\gamma\tau+\delta)^r \ (r \text{ ganz}) \tag{7}$$

offenbar erfüllt, gelten hier aber ersichtlich auf der vollen Gruppe $\mathfrak{R}$ aller reellen L mit $|L| > 0$. Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß man für *jede* Gruppe $\overline{\Gamma}$ der oben genannten Art die sinnvolle Frage nach den automorphen Transzendenten stellen kann, die sich bei Anwendung der Substitutionen von $\overline{\Gamma}$ mit Hilfe des *Transformationsfaktors* $R_{0,r}$ aus (7) umsetzen.

In der vorliegenden Abhandlung untersuchen wir die Möglichkeit einer Verallgemeinerung *dieses* Sachverhalts über die $R_{0,r}$; wir beabsichtigen also *nicht*, das Lösungssystem der Gleichungen (5), (6) für eine *individuelle* Gruppe Γ_0 zu bestimmen, sondern fragen nach den sämtlichen für $\tau \subset \mathfrak{H}$, $L \subset \mathfrak{R}$ (bis auf Ausnahme-Mannigfaltigkeiten niederer Dimension) erklärten $R(\tau, L)$, die ebenso wie $R_{0,r}$ dem System der Funktionalgleichungen (6) für alle τ in $\mathfrak{H}$ und alle L in $\mathfrak{R}$ genügen. Überdies setzen wir $R(\tau, L)$ als *rationale Funktion* in den fünf Variabeln τ, α, β, γ, δ ($\tau \subset \mathfrak{H}$, $L \subset \mathfrak{R}$) voraus und verzichten zunächst auf die Erfüllung der Normierungsvorschrift (5). Es wird sich zeigen, daß man, von rationalen Lösungen ausgehend, zu einer Fülle transzendenter Lösungen gelangen kann.

Nach elementaren Sätzen der Algebra genügt eine Funktion $R(\tau, L)$ der genannten Beschaffenheit dem System der Funktionalgleichungen (6) für beliebige komplexe τ und beliebige Paare komplexer Matrizen L_1, L_2. Es gilt also

$$R(S\,\tau, M)\; R(\tau, S) = R(\tau, MS) \tag{8}$$

für alle komplexen τ und für alle komplexen zweireihigen quadratischen Matrizen M, S, wenn man gewisse niederdimensionale Mannigfaltigkeiten im neundimensionalen komplexen Raum der τ, M, S ausnimmt. Für jedes gerade r erhält man in der nach (7) erklärten Funktion $R_{0,r}(\tau, L)$ eine Lösung dieses Problems. Da ferner keine Homogenität verlangt wird, stellt für jedes ganze r auch die Funktion

$$R_r^*(\tau, S) = (c\,\tau + d)^r \quad (r \text{ ganz}, S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) \tag{9}$$

eine Lösung dar. Wenn man andrerseits unter r eine feste komplexe Zahl versteht und die Variable τ auf die obere Halbebene $\mathfrak{H}$ einschränkt, so gilt anstelle von (8) für die durch (9) erklärte Funktion $R_r^*(\tau, S)$:

$$R_r^*(S\,\tau, M)\; R_r^*(\tau, S) = \sigma_r^*(M, S)\; R_r^*(\tau, MS) \quad (\tau \subset \mathfrak{H};\ M, S \subset \mathfrak{R}), \tag{10}$$

wo $\sigma_r^*(M, S)$ eine komplexe Zahl von der Gestalt $e^{2\pi i \nu r}$ mit ganzem ν bezeichnet. Das Auftreten von σ^* sowie die Tatsache, daß die spätere Untersuchung dadurch nicht beeinflußt wird, veranlaßt uns, das oben angedeutete Problem im folgenden Umfange zu verallgemeinern:

Gesucht sind die sämtlichen in τ und den Elementen von $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ rationalen Funktionen $R(\tau, S)$, die — abgesehen von Ausnahme-Mannigfaltigkeiten niederer Dimension — für alle komplexen τ und alle komplexen zweireihigen Matrizen M, S den Funktionalgleichungen

$$R(S\,\tau, M)\; R(\tau, S) = \sigma_R(M, S)\; R(\tau, MS) \tag{11}$$

genügen; dabei bezeichnet $\sigma_R(M, S)$ für jedes feste solche Matrizenpaar M, S eine von τ unabhängige komplexe Zahl.

Wir geben jetzt die genaue Formulierung des so bestimmten Problems.

Es bezeichne $\mathfrak{U}$ die Gesamtheit aller komplexen Matrizen $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $\mathfrak{W}$ die Gesamtheit aller umkehrbaren komplexen Matrizen $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

An die Funktion $R(\tau, S)$ stellen wir die folgenden *Forderungen*:

A. *Es existiere eine rationale Funktion* $R(\tau, S) = R(\tau; a, b, c, d)$ $\left(S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)$ *der fünf unabhängigen komplexen Variabeln* τ, a, b, c, d *mit folgenden Eigenschaften*:

1. Für diejenigen komplexen τ *und diejenigen* M, S *aus* $\mathfrak{U}$, *für welche* $S\tau, R(S\tau, M), R(\tau, S), R(\tau, MS)$ *erklärt sind, gelte* (11). *Dabei bezeichnet* $\sigma_R(M, S)$ *für jedes feste solche Matrizenpaar* M, S *aus* $\mathfrak{U}$ *eine von* τ *unabhängige komplexe Zahl.*

2. Zu jedem festen S_0 *aus* $\mathfrak{W}$ *gebe es ein* L *aus* $\mathfrak{U}$ *derart, daß entweder* $\sigma_R(L, S_0)$ *oder* $\sigma_R(S_0, L)$ *erklärt und von Null verschieden ist.*

Zu diesen Forderungen bemerken wir: Die in allen Variabeln τ, a, b, c, d identisch verschwindende Funktion $R(\tau; a, b, c, d)$ wird von der ferneren Untersuchung ausgeschlossen. Es kann und soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $R(\tau, S)$ in reduzierter Gestalt vorliegt, daß also das Zähler- und Nennerpolynom von $R(\tau, S)$ keine gemeinsamen Faktoren enthalten. Daraus folgt: Hat man irgend eine rationale Darstellung von $R(\tau, S)$ gefunden, deren Zähler und Nenner im Punkte τ_0, S_0 nicht verschwinden, so gilt dies im gleichen Punkte auch für Zähler und Nenner der reduzierten Darstellung. Entsprechendes kann von der (in den acht Elementen von M, S offenbar rationalen) Funktion $\sigma_R(M, S)$ gesagt werden.

Aus den Forderungen **A.** läßt sich nun, wie man durch überwiegend elementar-algebraische Überlegungen erkennt, die Struktur der Funktionen $R(\tau, S)$ vollständig bestimmen. Sie ergeben sich in der Gestalt

$$R(\tau,S)=H(S)(c\tau+d)^r\frac{Q(S\tau)}{Q(\tau)}\quad\left(S=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right),\ \sigma_R(M,S)=\frac{H(M)H(S)}{H(MS)}\right)\tag{12}$$

wo $Q(\tau)$ eine rationale Funktion von τ, $H(S)$ eine rationale Funktion von a, b, c, d und r eine ganze Zahl bezeichnet. Umgekehrt stellt jeder Ausdruck (12) mit willkürlichen H, Q, r der angegebenen Bedeutung eine Lösung unseres Problems dar, vorausgesetzt, daß H und Q nicht identisch verschwinden, und daß σ_R mit H durch die dritte Gleichung (12) verknüpft ist. Zur Verwendung als Transformationsfaktoren bei

diskreten Gruppen $\Gamma = \Gamma_1$, die aus reellen unimodularen Matrizen bestehen, eignen sich die aus (12) durch eine naheliegende Verallgemeinerung hervorgehenden Ausdrücke

$$R(\tau, L) = v(L)(\gamma\tau + \delta)^r \frac{Q(L\tau)}{Q(\tau)}, Q(\tau) = \prod_{i=1}^{n} (\tau - \lambda_i)^{r_i} \quad (L = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \subset \Gamma_1, \tau \subset \mathfrak{H}) \tag{13}$$

in denen r sowie diejenigen r_i, für welche $\Im\mathfrak{m}\ \lambda_i \leqq 0$ ist, komplex gewählt werden können und v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$ angibt; auch hier unterliegen die r, r_i, λ_i keiner Einschränkung, wofern nur der Bedingung: r_i ganz für $\Im\mathfrak{m}\ \lambda_i > 0$ entsprochen wird. Wir nennen die so bestimmten Funktionen $R(\tau, L)$ aus (13) *quasirational*.

Es sei insbesondere $\Gamma = \Gamma_1$ eine Grenzkreisgruppe. Man betrachte eine in $\mathfrak{H}$ bis auf Pole reguläre analytische Funktion $g(\tau)$, die den Transformationsgleichungen (4) mit rationalem oder quasirationalem $R(\tau, L)$ $(L \subset \Gamma_1)$ genügt, und die, wenn sich τ im Raum zwischen zwei Orthogonalkreisen durch einen parabolischen Fixpunkt von Γ_1 diesem Fixpunkt annähert, nicht stärker anwächst als eine Potenz der zugehörigen ortsuniformisierenden Variablen. Dann stellt offenbar $\frac{g(\tau)}{Q(\tau)}$ eine automorphe Form im herkömmlichen Sinne dar; es unterscheidet sich also $g(\tau)$ von einer automorphen Form im herkömmlichen Sinne um eine durch R allein bestimmte elementare Funktion $Q(\tau)$ von τ als Faktor.

Dieser Satz kann als Eindeutigkeitssatz über die multiplikativen Invarianten der linearen Substitutionsgruppen in der oberen Halbebene der betreffenden Variabeln τ interpretiert werden. Denn er besagt ersichtlich, daß die automorphen Formen von komplexer Dimension im wesentlichen bereits die allgemeinsten rein multiplikativen Invarianten sind, die sich bei den Substitutionen der Gruppe mit rationalen oder quasirationalen *Transformationsfaktoren* umsetzen.

Vom algebraischen Standpunkt bedarf die obige Lösung (12) noch einer Ergänzung, weil durch sie nicht geklärt wird, welche rationalen Funktionen $H(S)$ für eine Lösung (12) des Problems A. mit vorgegebenem σ_R in Betracht kommen. Diese Frage kann im wichtigsten Falle $\sigma_R = 1$, von dem wir oben ausgingen, vollständig beantwortet werden. Denn hier handelt es sich in den zulässigen $H(S)$ um die *rationalen multiplikativen Matrizenfunktionen*, und es läßt sich beweisen, daß jedes solche $H(S)$ mit einer Potenz der Determinante von S

übereinstimmt. Da mir aus der Literatur kein algebraischer Beweis des entsprechenden allgemeinen Satzes über die multiplikativen rationalen Funktionen der n-reihigen quadratischen Matrizen bekannt ist[1], beweise ich diesen Satz am Schluß des Abschnittes 4 für solche rationalen Funktionen der genannten Art, deren Koeffizienten einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null angehören. — Der Beweis ist unabhängig von dem Vorangehenden für sich allein verständlich; insbesondere stelle ich vor der Durchführung die algebraischen Grundlagen etwas ausführlicher zusammen.

Nach diesem Satz erhält die *allgemeinste Lösung des Problems* **A.** *mit* $\sigma_R(M, S) \equiv 1$ die Gestalt

$$R(\tau, S) = |S|^h (c\tau + d)^r \frac{Q(S\tau)}{Q(\tau)} \quad (S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \subset \mathfrak{W}) \tag{12a}$$

mit ganzen h, r und einer nicht identisch verschwindenden rationalen Funktion $Q(\tau)$. Daß jeder Ausdruck (12a) tatsächlich eine Lösung darstellt, kann auch daraus erschlossen werden, daß bereits jeder der drei Faktoren $|S|^h$, $(c\tau + d)^r$, $\frac{Q(S\tau)}{Q(\tau)}$ auf der rechten Seite von (12a) für sich allein eine Lösung bildet. Ein Ausdruck von der Form der rechten Seite in (12a) ist dann und nur dann rational in τ, a, b, c, d und homogen von der Dimension Null in a, b, c, d, wenn r eine gerade Zahl und $h = -\frac{r}{2}$ ist.

Im fünften und letzten Abschnitt wird die Verallgemeinerung des eingangs entwickelten Hauptproblems der vorliegenden Abhandlung auf die *hyperabelschen Transformationsgruppen* in n komplexen Variabeln diskutiert. Auch hier fragt man nach den rationalen Lösungen einer gewissen, zu (8) analogen Funktionalgleichung, die das Verhalten des betreffenden Transformationsfaktors R gegenüber der engeren

---

[1] *O. Perron*, Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung, Math. Zeitschr. 48 (1942/43), behandelt das genannte Problem mit analytischen Methoden. Es werden allgemeiner als oben die in der Umgebung von $X =$ Einheitsmatrix I analytischen Lösungen $F(X)$ der Funktionalgleichung $F(X)\,F(Y) = F(XY)$ bestimmt, wo X, Y komplexe quadratische Matrizen mit variablen Elementen bezeichnen, und $F(X)$ selbst eine quadratische komplexe Matrix beliebiger Zeilenzahl ist, über die $F(I) = I$ vorausgesetzt wird; die Zeilenzahlen von X und $F(X)$ brauchen nicht zusammenzufallen. — Für die algebraische Behandlung im Falle skalarer $F(X)$ bietet gerade der Beweis dieser Normierung $F(I) = 1$ die einzige erwähnenswerte Schwierigkeit.

Automorphismengruppe des Variabeln-Teilraumes $\mathfrak{T}$ beschreibt, welcher dem Grenzkreisinnern $\mathfrak{H}$ in der einen komplexen Variablen τ entspricht.

Wir formulieren kurz das Problem und das Ergebnis, wobei wir uns, was die Bezeichnungen der hier auftretenden Funktionen angeht, der sogleich zu Beginn von 2. erklärten Terminologie bedienen. Es seien $\tau^{(\nu)}$ komplexe Variable, $S^{(\nu)} = \begin{pmatrix} a^{(\nu)} & b^{(\nu)} \\ c^{(\nu)} & d^{(\nu)} \end{pmatrix}$ und $M^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ reelle zweireihige quadratische Matrizen mit Determinanten $|S^{(\nu)}| > 0, |M^{(\nu)}| > 0$. Die engere Automorphismengruppe $\mathfrak{N}$ des durch $\mathfrak{Im}\ \tau^{(\nu)} > 0$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ bestimmten Teilraumes $\mathfrak{T}$ besteht aus den Transformationen $\tau_1^{(\nu)} = S^{(\nu)}\ \tau^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$. Wir bezeichnen die Systeme $\tau^{(\nu)}$, $S^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}$, $S^{(\nu)}\ (\tau^{(\nu)}) = S^{(\nu)}\ \tau^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}\ S^{(\nu)}$ im folgenden, bzw. mit (τ), (S), (M), $(S\ \tau)$, (MS).

Die in den $5n$ Variabeln $\tau^{(\nu)}$, $a^{(\nu)}$, $b^{(\nu)}$, $c^{(\nu)}$, $d^{(\nu)}$ rationale Funktion

$$R\ ((\tau), (S)) = R\ (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}; S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)})$$

erfülle nun für die genannten (τ), (S), (M), abgesehen von niederdimensionalen Ausnahme-Mannigfaltigkeiten, die Funktionalgleichung

$$R\ ((S\tau), (M))\ R\ ((\tau), (S)) = R\ ((\tau), (MS)). \tag{8a}$$

Dann ergeben die Überlegungen des Abschnitts 5 das folgende *Hauptresultat*:

Die Funktionalgleichung (8a) gilt, abgesehen von niederdimensionalen Ausnahme-Mannigfaltigkeiten für beliebige komplexe $\tau^{(\nu)}$, $S^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}$. Wenn $R\ ((\tau), (S))$ nicht identisch verschwindet, hat $R\ ((\tau), (S))$ die Gestalt

$$R\ ((\tau), (S)) = \left\{ \prod_{\nu=1}^{n} \left(|S^{(\nu)}|^{h_\nu} (c^{(\nu)}\ \tau^{(\nu)} + d^{(\nu)})^{r_\nu} \right\} \frac{Q(S^{(1)}\ \tau^{(1)}, \ldots, S^{(n)}, \tau^{(n)})}{Q\ (\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)})} \tag{12b}$$

$$(\tau^{(\nu)}, S^{(\nu)} \text{ komplex});$$

hier bezeichnen die h_ν, r_ν feste ganze Zahlen, und $Q\ (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}) = Q\ ((\tau))$ stellt eine feste rationale Funktion in den n komplexen Variabeln $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}$ dar.

Ist ferner eine diskrete hyperabelsche Transformationsgruppe, also eine diskrete Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{N}$ vorgelegt[2], und kennt man eine bei den Transformationen von $\mathfrak{G}$ relativ-invariante, in den Ortsvariabeln

[2] *H. Maass*, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen, Sitzber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-naturwiss. Kl. 1940, 2. Abhandl.

der Punkte von $\mathfrak{T}$ meromorphe analytische Funktion $g((\tau)) = g(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)})$, die sich bei $\mathfrak{G}$ mit Hilfe des Transformationsfaktors $R((\tau), (S))$, also gemäß der Formel

$$g((S\,\tau)) = R((\tau), (S))\, g((\tau)) \qquad ((\tau) \subset \mathfrak{T},\ (S) \subset \mathfrak{G}) \tag{4a}$$

umsetzt, so erweist sich die Funktion $f((\tau)) = f(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}) = \dfrac{g((\tau))}{Q((\tau))}$ als eine automorphe Form im herkömmlichen Sinne zur Gruppe $\mathfrak{G}$ und zum ganzzahligen Dimensionensystem $(-r) = (-r_1, -r_2, \ldots, -r_n)$; $g((\tau))$ unterscheidet sich also von einer automorphen Form $f((\tau))$ im herkömmlichen Sinne um eine rationale, durch R eindeutig bestimmte Funktion Q als Faktor. Im übrigen gilt $|S^{(\nu)}| = 1$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ für jedes $(S) \subset \mathfrak{G}$.

Als *quasirational* (i. b. a. den Teilraum $\mathfrak{T}$) wird man schließlich einen Transformationsfaktor R von der Gestalt

$$R((\tau), (S)) = V((S)) \prod_{\nu=1}^{n} \left(|S^{(\nu)}|^{h_\nu} (c^{(\nu)}\,\tau^{(\nu)} + d^{(\nu)})^{r_\nu} \right) \prod_{k=1}^{q} \frac{(Q_k((S\,\tau)))^{s_k}}{(Q_k((\tau)))^{s_k}} \tag{12c}$$

$$((\tau) \subset \mathfrak{T},\ S^{(\nu)} \text{ reell},\ |S^{(\nu)}| > 0)$$

mit einem beliebigen natürlichen q, beliebigen komplexen Exponenten h_ν, r_ν, s_k und beliebigen rationalen Funktionen $Q_k((\tau))$ bezeichnen, wenn feststeht, daß s_k ganz ist, falls $Q_k((\tau))$ irgendwo in $\mathfrak{T}$ verschwindet; dabei darf $V((S))$ irgend eine auf $\mathfrak{A}$ stets von Null verschiedene Funktion der $S^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ bedeuten. Genügt nun die in den Ortsvariabeln von $\mathfrak{T}$ überall meromorphe analytische Funktion $g((\tau))$ den Funktionalgleichungen (4a) mit einem $R((\tau), (S))$ nach (12c), so erhält man in $f((\tau)) = g((\tau)) \prod_{k=1}^{q} Q_k((\tau))^{-s_k}$ eine automorphe Form im herkömmlichen Sinne zur Gruppe $\mathfrak{G}$, zum komplexen Dimensionensystem $(-r) = (-r_1, -r_2, \ldots, -r_n)$ und zum Multiplikatorsystem V.

2. Zur Terminologie der im folgenden auftretenden algebraischen und analytischen Prozesse treffen wir die nachstehenden Verabredungen: Durchläuft $S_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ein System variabler Matrizen aus $\mathfrak{U}$, und bezeichnet Φ eine von den $4n$, bzw. $4n+1$ Variabeln a_i, b_i, c_i, d_i, bzw. a_i, b_i, c_i, d_i, τ $(1 \leqq i \leqq n)$ abhängige Funktion, so drücken wir diesen Sachverhalt durch das Symbol $\Phi(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, bzw. $\Phi(\tau, S_1, S_2, \ldots, S_n)$ aus. Analog verstehen wir, wenn $\mathfrak{R}$ einen Zahlen- oder Funktionenkörper angibt, unter $\mathfrak{R}(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, bzw. $\mathfrak{R}(\tau, S_1,$

$S_2, \ldots, S_n$) denjenigen Körper, der aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion der $4n$, bzw. $4n+1$ Variabeln a_i, b_i, c_i, d_i, bzw. a_i, b_i, c_i, d_i, τ hervorgeht und unter $\mathfrak{R}[S_1, S_2, \ldots, S_n]$, bzw. $\mathfrak{R}[\tau, S_1, S_2, \ldots, S_n]$ den Polynombereich über $\mathfrak{R}$ in den Variabeln a_i, b_i, c_i, d_i, bzw. a_i, b_i, c_i, d_i, τ $(1 \leqq i \leqq n)$. Von einer Funktion $\Phi(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, bzw. $\Phi(\tau, S_1, S_2, \ldots, S_n)$ sagen wir, sie sei ein Polynom oder rational oder algebraisch oder regulär-analytisch in den $S_1, S_2, \ldots, S_n$, bzw. $S_1, S_2, \ldots, S_n, \tau$, wenn sie diese Eigenschaft in den sämtlichen Variabeln a_i, b_i, c_i, d_i, bzw. a_i, b_i, c_i, d_i, τ aufweist. — Den Körper der komplexen Zahlen nennen wir $\mathfrak{k}$.

Der analogen Terminologie bedienen wir uns im fünften Abschnitt bei der Untersuchung der Funktionen von n komplexen Variabeln $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}$ und n oder $2n$ komplexen Matrizen $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)}$, $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(n)}$.

Wir setzen die Forderungen **A.** *1.*, *2.* bis auf weiteres als erfüllt voraus, und ziehen aus ihnen einige Folgerungen, um die Beschaffenheit der rationalen Lösungen der Funktionalgleichung (11) zu ermitteln. Dabei sollen zunächst einige Präliminarien erledigt werden; sie betreffen die Frage, ob eine der Funktionen $\sigma_R(M, S_0), \sigma_R(S_0, S), R(\tau, S_0)$ bei festem S_0 identisch in dem anderen Argument verschwinden kann, sowie eine mögliche Normierung der genannten Funktionen für $S_0 = I$. Die eigentliche Diskussion des Problems **A.** beginnt nach Gleichung (17) und verläuft folgendermaßen: Die Funktionalgleichung (11) wird so geschrieben, daß sie die Übereinstimmung zweier Polynome ausdrückt, diese werden als Polynome von τ in Linearfaktoren zerlegt, und es wird sodann eine Zuordnung zwischen den Linearfaktoren der beiden Seiten dadurch hergestellt, daß sich diese paarweise gegeneinander kürzen lassen. Schließlich ergibt sich die Struktur der allgemeinen rationalen Lösung $R(\tau, S)$ von **A.** unmittelbar aus einer Darstellung von $R(\tau, S)$ als Potenzprodukt von Linearfaktoren, die entsprechend der genannten Zuordnung zusammengefaßt werden.

Wird im folgenden $S\tau$ für eine Matrix S aus $\mathfrak{U}$ gebildet, so gelte es als selbstverständlich, daß

$$\text{die zweite Zeile } \underline{S} = \{c, d\} \text{ der Matrix } S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$$

von $\{0, 0\}$, und daß τ im Falle $c \neq 0$ von $-\frac{d}{c}$ verschieden ist. Daß $R(\tau, S)$ für ein gegebenes S aus $\mathfrak{U}$ und für irgend ein komplexes τ im Sinne von A. 1. existiere, besagt offenbar folgendes: Schreibt man $R(\tau, S)$ als Quotienten zweier Polynome in τ und S und jedes dieser Polynome

als Polynom in τ über $\mathfrak{k}[S]$, so werden die Polynome in S über $\mathfrak{k}$, die als Koeffizienten der Potenzen von τ im Nennerpolynom fungieren, durch das Einsetzen der individuellen Matrix S nicht sämtlich zum Verschwinden gebracht. Bei der genannten Darstellung von $R(\tau, S)$ kann hier und soll im folgenden vorausgesetzt werden, daß Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Faktor enthalten.

Aus **A.** geht hervor, daß die Funktion $\sigma_R(M, S)$ ein Element des Körpers $\mathfrak{k}(M, S)$ ist; denn nach den Voraussetzungen verschwindet weder das Zähler- noch das Nennerpolynom von $R(\tau, S)$ identisch in S. Und wir schreiben

$$\sigma_R(M, S) = \frac{\xi(M, S)}{\eta(M, S)} \text{ mit } \xi(M, S) \text{ und } \eta(M, S) \subset \mathfrak{k}[M, S].$$

Die Frage, wann $\sigma_R(M, S)$ nach dieser Definition einen wohlbestimmten und von Null verschiedenen Wert annimmt, hängt aufs engste mit der Frage zusammen, für welche Argumente $S_0 \subset \mathfrak{U}$ die Funktion $R(\tau, S_0)$ erklärt und von Null verschieden ist. Beide Fragen sollen sogleich erörtert werden. Wir stützen uns dabei auf den folgenden Sachverhalt:

Zwischen den Werten der Funktion $\sigma_R(M, S)$ besteht eine Relation nach Art des *Assoziativgesetzes*, die man so herleiten kann: Man ersetze in (11) τ durch $S'\tau$ ($S' \subset \mathfrak{W}$) und multipliziere die entstehende Gleichung mit $R(\tau, S')$. Dann ergibt sich, weil $R(\tau, MSS')$ nicht identisch in τ, M, S, S' verschwinden kann:

$$\sigma_R(M, SS')\,\sigma_R(S, S') = \sigma_R(MS, S')\,\sigma_R(M, S) \quad (M, S, S' \subset \mathfrak{W}). \tag{14}$$

Aus dieser Identität läßt sich natürlich eine für $M, S, S' \subset \mathfrak{U}$ allgemein gültige Relation zwischen den Polynomen ξ, η gewinnen. Beim Beweise von (14) hat man, etwa nach dem im folgenden Absatz beschriebenen Verfahren, darauf zu achten, daß alle sechs in der genannten Umformung auftretenden Funktionen von der Gestalt $R(S_1\,\tau, S_2)$:

$$S_1, S_2 = SS', M;\ S', S;\ I, S';\ S', MS;\ I, SS';\ I, MSS' \qquad \left(I = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)$$

regulär und ungleich Null ausfallen.

Aus (14) und **A.** 2. folgt nun, daß $\sigma_R(M, S_0)$ für ein gegebenes S_0 in $\mathfrak{W}$ bei passendem M in $\mathfrak{U}$ erklärt und von Null verschieden ist. Denn nach (14) wird

$$\sigma_R(M, S_0 S)\,\sigma_R(S_0, S) = \sigma_R(MS_0, S)\,\sigma_R(M, S_0).$$

Wenn hier $\sigma_R(S_0, S)$ für ein S in $\mathfrak{U}$ erklärt und von Null verschieden ist, so gilt dies offenbar für eine volle Umgebung im Raume dieser S, also auch für eine volle Umgebung umkehrbarer S. Dann aber können M

in einer vollen Umgebung des M-Raumes und S in der genannten Umgebung so bestimmt werden, daß zunächst $\sigma_R(M, S_0 S)$ und darauf, eventuell jedesmal durch Einschränkung der erhaltenen Umgebungen, $\sigma_R(MS_0, S)$ erklärt und von Null verschieden sind.

Ferner ergibt sich nach demselben Verfahren aus der Grundgleichung (11), daß durch passende Bestimmung von $M \subset \mathfrak{W}$ und $\tau \subset \mathfrak{k}$ erreicht werden kann, daß

$$R(\tau, S_0) = \frac{\sigma_R(M, S_0)\, R(\tau, MS_0)}{R(S_0\,\tau, M)}$$

erklärt und von Null verschieden ist, gemäß **A.** also eine nicht identisch verschwindende rationale Funktion von τ darstellt. Insgesamt haben wir damit gezeigt: Für jedes feste $S_0 \subset \mathfrak{W}$ stellt sowohl $\sigma_R(M, S_0)$ als auch $\sigma_R(S_0, S)$ als auch $R(\tau, S_0)$ eine nicht identisch verschwindende rationale Funktion von M, bzw. S, bzw. τ dar.

Das Analogon der Normierungsvorschrift (5) für $\lambda = -1$, $L = I$ besteht in dem folgenden Zusammenhang: Setzt man in (11) einerseits M, andrerseits $S = I$, so findet man

$$R(\tau, I) = \sigma_R(M, I)\ (M \subset \mathfrak{W}),\ R(\tau, I) = \sigma_R(I, S)\ (S \subset \mathfrak{W}). \quad (15)$$

Daher hängt weder $R(\tau, I)$ von τ, noch $\sigma_R(M, I)$ von M, noch $\sigma_R(I, S)$ von S ab; es gilt

$$\sigma_R(M,I) = \sigma_R(I,S) = \sigma_R(I,I) \neq 0\,(M,S \subset \mathfrak{W}),\ R(\tau,I) = \sigma_R(I,I)\ (\tau \subset \mathfrak{k}) \quad (16)$$

Man ersetze nun $R(\tau, S)$ durch $\dfrac{R(\tau, S)}{\sigma_R(I,I)}$, $\sigma_R(M, S)$ durch $\dfrac{\sigma_R(M, S)}{\sigma_R(I,I)}$

und bezeichne die neuen Größen wieder mit $R(\tau, S)$, bzw. $\sigma_R(M, S)$. Dann bleibt die bisher entwickelte Theorie in allen Einzelheiten bestehen, nur hat man jetzt anstelle von (16)

$$\sigma_R(M,I) = \sigma_R(I,S) = \sigma_R(I,I) = R(\tau,I) = 1 \quad (M,S \subset \mathfrak{W}, \tau \subset \mathfrak{k}). \quad (16a)$$

Setzt man schließlich in (11) $M = S = -I$, so kommt nach (16a)

$$(R(\tau, I))^2 = \sigma_R(-I, -I),\ R(\tau, -I) = \pm\sqrt{\sigma_R(-I, -I)}; \quad (17)$$

diese Tatsache kann man als eine Verallgemeinerung der für Multiplikatoren der komplexen Dimension $-r$ gültigen Gleichung $v(-I) = e^{-\pi i r}$ auffassen. —

Wir denken uns die rationale Funktion $R(\tau, S)$ in der Gestalt

$$R(\tau, S) = \frac{P(\tau, S)}{Q(\tau, S)} = \frac{a(S)\tau^h + a_1(S)\tau^{h-1} + a_2(S)\tau^{h-2} + \dots}{b(S)\tau^k + b_1(S)\tau^{k-1} + b_2(S)\tau^{k-2} + \dots}$$

geschrieben, in der $P(\tau, S)$, $Q(\tau, S)$ Polynome in S und τ über $\mathfrak{k}$, ferner $a(S)$, $a_1(S)$, $a_2(S)$, $\dots$, $b(S)$, $b_1(S)$, $b_2(S)$, $\dots$ Polynome in S über $\mathfrak{k}$ darstellen, $a(S)$ und $b(S)$ als Polynome in S nicht verschwinden. Danach gilt (auch für $h = 0$ oder $k = 0$)

$$R(\tau, S) = C(S)\frac{P_1(a(S)\tau, S)}{Q_1(b(S)\tau, S)}, \qquad C(S) = \frac{b(S)^{k-1}}{a(S)^{h-1}} \subset \mathfrak{k}(S), \tag{18}$$

$$P_1(u, S) = u^h + a_1'(S)u^{h-1} + a_2'(S)u^{h-2} + \dots, Q_1(u, S) = \\ = u^k + b_1'(S)u^{k-1} + b_2'(S)u^{k-2} + \dots,$$

$$a_1'(S), a_2'(S), \dots, b_1'(S), b_2'(S), \dots \subset \mathfrak{k}[S],$$

und wir können $R(\tau, S)$ gemäß

$$R(\tau, S) = C(S)\prod_{i=1}^{h}(p_0(S)\tau + p_i(S))\prod_{j=1}^{k}(q_0(S)\tau + q_j(S))^{-1} \tag{19}$$
$$(p_0(S) = a(S), q_0(S) = b(S))$$

in Linearfaktoren zerlegen. Dabei sind die $p_i(S)$, $q_i(S)$ als Nullstellen der Polynome $P_1(u, S)$, $Q_1(u, S)$ algebraische Elemente über $\mathfrak{k}(S)$, d. h. algebraische Funktionen von S. Sie verhalten sich also in allen im Endlichen gelegenen Punkten des Raumes $\mathfrak{Z}_4$ der vier komplexen Variabeln a, b, c, d, abgesehen von Mannigfaltigkeiten niederer Dimension, regulär-analytisch in S und bleiben selbst überall endlich; d. h. zu jeder von ihnen und zu jedem Punkte S_0 in $\mathfrak{Z}_4$ gibt es eine durch S_0 hindurchgehende niederdimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die betreffende Funktion eindeutig und stetig erklärt werden kann.

Wie setzen

$$\mathfrak{p}_i(S) = \{p_0(S), p_i(S)\}, \mathfrak{q}_j(S) = \{q_0(S), q_j(S)\} \ (1 \leqq i \leqq h, 1 \leqq j \leqq k),$$

behandeln diese Vektoren als Zeilen, schreiben dementsprechend

$$\mathfrak{p}_i'(M) \equiv \mathfrak{p}_i(M)S = \{p_0'(M), p_i'(M)\}, \ \mathfrak{q}_j'(M) = \mathfrak{q}_j(M)S = \{q_0'(M), q_j'(M)\} \tag{20}$$

(unterdrücken also in der Symbolik (20) die Abhängigkeit der gestrichenen Objekte von S) und erhalten nunmehr nach (11) die (als Identität zwischen Polynomen) für alle M, $S \subset \mathfrak{U}$ und alle komplexen τ gültige, ersichtlich völlig symmetrische Relation

$$q_0(M)^{k-1}\, q_0(S)^{k-1}\, p_0(MS)^{k-1}\, \eta(M,S)\,(c\tau+d)^k \;\times$$
$$\times \prod_{i=1}^{h} (p_0'(M)\,\tau + p_i'(M)) \prod_{i=1}^{h} (p_0(S)\,\tau + p_i(S)) \prod_{j=1}^{k} (q_0(MS)\,\tau + q_j(MS)) = \tag{21}$$
$$= p_0(M)^{h-1}\, p_0(S)^{h-1}\, q_0(MS)^{k-1}\, \xi(M,S)\,(c\tau+d)^h \;\times$$
$$\times \prod_{j=1}^{k} (q_0'(M)\,\tau + q_j'(M)) \prod_{j=1}^{k} (q_0(S)\,\tau + q_j(S)) \prod_{i=1}^{h} (p_0(MS)\,\tau + p_i(MS)).$$

Hier kann man, wenn nicht h oder $k = 0$ ist, auf mindestens einer von beiden Seiten der Gleichung die dort auftretende Potenz des Linearfaktors $c\tau + d$ herausdividieren. Wir modifizieren (21) also dahin, daß entweder rechts oder links kein Faktor $c\tau + d$ stehen bleibt, und daß demgemäß links, bzw. rechts der Faktor $c\tau + d$ mit dem Exponenten $k - h$, bzw. $h - k$ auftritt. Wenn h oder k verschwindet, unterbleibt diese Reduktion, die betreffenden Produkte über i oder j sind durch 1 zu ersetzen, und man hat, um eine Gleichung zu erhalten, deren beide Seiten Produkte von Polynomen sind, (21) mit $p_0(M)\; p_0(S)\; p_0(MS)$ oder $q_0(M)\; q_0(S)\; q_0(MS)$ zu multiplizieren. Auf die folgende Diskussion hat diese Änderung keinen Einfluß.

3. Wegen der Symmetrie in (21) ist es methodisch gleichgültig, ob $h > k$ oder $k > h$ zutrifft, falls h von k verschieden ist. Es sei etwa $h > k$. Dann muß $c\tau + d$ als Polynom in τ in einem der $2h + k$ Faktoren der Produkte auf der linken Seite aufgehen. Das bedeutet, daß der Vektor $\{c, d\}$ zusammen mit einem der Vektoren

$$\mathfrak{r}(M,S) = \mathfrak{p}_i'(M) = \mathfrak{p}_i(M)\,S, \text{ oder } = \mathfrak{p}_i(S), \text{ oder } \mathfrak{q}_j(MS)$$

linear abhängig ist. In der entsprechenden Relation

$$\lambda\,\mathfrak{r}(M,S) + \mu\,\{c,d\} = \lambda\,\mathfrak{r}(M,S) + \mu\,\{0,1\}\,S = \mathfrak{o}\;(= \text{Nullvektor})$$

können λ, μ, als algebraische Elemente über $\mathfrak{k}(M,S)$ angesehen werden; als solche sind sie beide ungleich Null.

Zur Diskussion dieser und ähnlicher Relationen bedienen wir uns der Existenz gewisser Umgebungen $\mathfrak{u}$ im achtdimensionalen komplexen Zahlenraum $\mathfrak{Z}_8$ der variabeln Matrizen M, S. In jeder Umgebung $\mathfrak{u}_0$ einer jeden Stelle M_0, S_0 des $\mathfrak{Z}_8$ existiert eine Umgebung $\mathfrak{u}$ derart, daß die Aussagen:

„Die höchsten und die niedrigsten Koeffizienten der λ und μ definierenden irreduziblen algebraischen Gleichungen über $\mathfrak{k}[M, S]$ sind beide ungleich Null, es ist also sowohl λ als auch μ regulär-analytisch, $\lambda \neq 0 \neq \mu$. Außerdem gilt

$$M \subset \mathfrak{W},\ S \subset \mathfrak{W};\ p_0(S) \neq 0 \neq q_0(S),\ p_0(M) \neq 0 \neq q_0(M).''$$

für die sämtlichen Matrizenpaare M, S in $\mathfrak{u}$ zutreffen. Wir nennen eine solche Umgebung *regulär* (in bezug auf die algebraischen Funktionen λ, μ).

Ist hier zunächst $\mathfrak{r}(M,S) = \mathfrak{p}_i(M)S$, so gilt $\lambda\,\mathfrak{p}_i(M) + \mu\,\{0, 1\}\,S = \mathfrak{o}$, und man kann diese Gleichung in einer regulären Umgebung von rechts mit S^{-1} multiplizieren. Daraus folgt mit $p_0(M) = 0$ ein Widerspruch. Im Falle $\mathfrak{r}(M, S) = \mathfrak{q}_j(MS)$ ergibt sich nach dem gleichen Verfahren, daß die erste Komponente des Vektors $\mathfrak{q}_j(MS)\,S^{-1}$, also die Funktion $q_0(MS)\,d - q_j(MS)\,c$ für alle M, S in einer regulären Umgebung verschwindet. Mithin verschwindet diese Funktion identisch in M, S. Man wähle nun für M eine feste Matrix $M = M_0$ von der Art, daß $q_j(M)$ als algebraische Funktion von M im Punkte $M = M_0$ regulär und unverzweigt ist, und daß das Polynom $q_0(M)$ im Punkte $M = M_0$ nicht verschwindet. Läßt man dann S in dem Ausdruck jener Funktion gegen I streben, so strebt die Funktion gegen $q_0(M_0)$, und dies enthält einen Widerspruch.

Damit ist gezeigt, daß (bei Berücksichtigung der beiden Möglichkeiten $h > k$ und $k > h$) in dem genannten Zusammenhange nur Teilbarkeitsrelationen von der Gestalt $\mathfrak{p}_i(S) = \vartheta(S)\,\{c, d\}$, $\mathfrak{q}_j(S) = \varrho(S)\,\{c, d\}$, d. h.

$$p_0(S)\,\tau + p_i(S) = \vartheta(S)\,(c\,\tau + d),\ q_0(S)\,\tau + q_j(S) = \varrho(S)\,(c\,\tau + d) \qquad (22)$$

vorliegen können. Hier sind $c\vartheta(S)$, $c\varrho(S)$ Polynome in S. Dies hat zur Folge, daß sich (21) auf eine für alle M, S in $\mathfrak{U}$ gültige Gleichung von der Gestalt

$$F(M,S)\prod_{i=1}^{h}(p_0'(M)\,\tau + p_i'(M))\prod_{i=1}^{k}(p_0(S)\,\tau + p_i(S))\prod_{j=1}^{k}(q_0(MS)\,\tau + q_j(MS)) =$$

$$= G(M,S)\prod_{j=1}^{k}(q_0'(M)\,\tau + q_j'(M))\prod_{j=1}^{k}(q_0(S)\,\tau + q_j(S))\prod_{i=1}^{h}(p_0(MS)\,\tau + p_i(MS)) \qquad (23)$$

reduziert, in der $F(M, S)$, $G(M, S)$ Polynome in M, S über $\mathfrak{k}$ darstellen. Bei der Reduktion wurde der Fall $h \geqq k$ zu Grunde gelegt; für $h \leqq k$ sind die oberen Multiplikationsgrenzen der mittleren Produkte auf beiden Seiten $= h$.

Es war angenommen worden, daß sich keine zwei Linearfaktoren in den Produkten auf der rechten Seite von (19) gegeneinander kürzen lassen. Daraus folgt, daß in (23) weder zwei Vektoren $\mathfrak{p}_i(S)$, $\mathfrak{q}_j(S)$ noch zwei Vektoren $\mathfrak{p}_i(MS)$, $\mathfrak{q}_j(MS)$, noch zwei Vektoren $\mathfrak{p}_i'(M) = \mathfrak{p}_i(M)S$,

$\mathfrak{q}_j'(M) = \mathfrak{q}_j(M)S$ einander proportional, d. h. miteinander linear abhängig sind. Die Proportionalität von $\mathfrak{p}_i(M)\,S$ und $\mathfrak{q}_j(M)\,S$ z. B. würde bedeuten, daß eine Relation $\lambda\,\mathfrak{p}_i(M)\,S + \mu\,\mathfrak{q}_j(M)\,S = \mathfrak{o}$ statt hat. In einer regulären Umgebung $\mathfrak{u}$ gilt also $\lambda_0\,\mathfrak{p}_i(M) + \mu_0\,\mathfrak{q}_j(M) = \mathfrak{o}$; λ_0 und μ_0 entstehen aus λ, μ durch Einsetzen eines festen S_0 mit S_0, $M \subset \mathfrak{u}$ und sind daher algebraisch über $\mathfrak{k}(M)$. Die letzte Relation besteht daher identisch in M und widerspricht den Voraussetzungen.

Zur Diskussion der Teilbarkeitsrelationen der Identität (23) gehen wir von den Faktoren der beiden mittleren Produkte aus. Jeder Vektor $\mathfrak{q}_j(S)$ ist einem der Vektoren $\mathfrak{p}_i'(M)$ oder $\mathfrak{q}_l(MS)$ porportional. Im ersten Falle hat man

$$\lambda\,\mathfrak{q}_j(S) + \mu\,\mathfrak{p}_i(M)S = \mathfrak{o}\ (\lambda, \mu \text{ algebraisch über } \mathfrak{k}(M,S),\ \lambda \neq 0 \neq \mu) \qquad (24)$$

beschränkt man M, S zunächst auf eine reguläre Umgebung $\mathfrak{u}$, so wird einerseits

$$\mathfrak{q}_j(S)S^{-1} = -\frac{\mu}{\lambda}\,\mathfrak{p}_i(M_0) = \varrho_1(S)\mathfrak{c} \qquad (25)$$
$$(M_0, S \subset \mathfrak{u}, M_0 \text{ fest}, \mathfrak{c} = \mathfrak{p}_i(M_0) = \{c_1, c_2\}),$$

$\mathfrak{q}(S) = \varrho_1(S)\,\mathfrak{c}\,S$, und hier ist $\varrho_1(S)\,(c_1 a + c_2 c) = q_0(S)$ ein Polynom in S über $\mathfrak{k}$. Andererseits wird nach (24), (25) mit demselben konstanten (d. h. von M, S, τ unabhängigen) $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{p}_i(M) = -\frac{\lambda}{\mu}\,\mathfrak{q}_j(S_0)\,S_0^{-1} = \varrho_2(M)\mathfrak{c}$$
$$(M, S_0 \subset \mathfrak{u}, S_0 \text{ fest}), p_0(M) = \varrho_2(M)\,c_1 \subset \mathfrak{k}[M].$$

Die damit gewonnenen Darstellungen $\mathfrak{q}_j(S) = \varrho_1(S)\,\mathfrak{c}\,S$, $\mathfrak{p}_i(M) = \varrho_2(M)\mathfrak{c}$ gelten allgemein, soweit beide Seiten der betreffenden Gleichung einen Sinn haben, also, abgesehen von niederdimensionalen Mannigfaltigkeiten, für M, $S \subset \mathfrak{U}$.

Im zweiten Falle handelt es sich um lineare Relationen von der Gestalt

$\lambda\,\mathfrak{q}_j(S) + \mu\,\mathfrak{q}_l(MS) = \mathfrak{o}$ (λ, μ algebraisch über $\mathfrak{k}(M, S)$, $\lambda \neq 0 \neq \mu$). Sie führen zu den Darstellungen

$$\mathfrak{q}_l(MS_0) = \varrho_2'(M)\,\mathfrak{q}_j(S_0),\ \mathfrak{q}_l(M) = \varrho_2(M)\,\mathfrak{c}\ (\mathfrak{c} = \{c_1, c_2\} \text{ konstant}),$$

$$q_0(M) = \varrho_2(M)\,c_1 \subset \mathfrak{k}[M],\ \mathfrak{q}_j(S) = -\frac{\mu}{\lambda}\,\varrho_2(M_0S)\,\mathfrak{c} = \varrho_1(S)\,\mathfrak{c},$$
$$q_0(S) = \varrho_1(S)\,c_1 \subset \mathfrak{k}[S],$$

die mit demselben $\mathfrak{c}$ zunächst für M, $S \subset \mathfrak{u}$, sodann aber im oben genannten Umfange allgemein für M, $S \subset \mathfrak{U}$ zutreffen.

Aus der Diskussion beider Fälle ergeben sich die disjunktiven Relationen

$$q_0(S)\tau + q_j(S) = \varrho_1(S)\{(c_1a + c_2c)\tau + (c_1b + c_2d)\}, p_0'(M)\tau + p_i'(M) = \\ = \varrho_2(M)\{(c_1a + c_2c)\tau + (c_1b + c_2d)\}; \quad (26a)$$

$$q_0(S)\tau + q_j(S) = \varrho_1(S)(c_1\tau + c_2), \quad q_0(MS)\tau + q_l(MS) = \varrho_2(MS)(c_1\tau + c_2). \quad (26b)$$

Analoge Teilbarkeitsrelationen entnimmt man dem Umstand, daß jeder der Linearfaktoren $p_0(S)\,\tau + p_i(S)$ $(1 \leqq i \leqq k)$ im mittleren Produkt auf der linken Seite von (23) einem der Linearfaktoren in den äußeren Produkten auf der rechten Seite proportional sein muß. Beide Arten von Relationen gestatten eine zweite Reduktion der Identität (21), die in (23) durch gegenseitiges Kürzen proportionaler Linearfaktoren bewirkt wird. Um sie durchzuführen, stellen wir die folgenden Überlegungen an.

Die Diskussion der Teilbarkeitsrelationen hat bereits ergeben, daß jeder der Vektoren $\mathfrak{r}(S) = \mathfrak{p}_i(S)$, $\mathfrak{q}_j(S)$ $(1 \leqq i \leqq h, 1 \leqq j \leqq k)$ in einer der Gestalten $\mathfrak{r}(S) = \varrho(S)\,\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{r}(S) = \varrho(S)\,\mathfrak{c}\,S$ mit einer rationalen Funktion $\varrho(S)$ und einem konstanten, d. h. von τ und S unabhängigen Vektor $\mathfrak{c}$ geschrieben werden kann. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir weiterhin einen Vektor $\mathfrak{r}(S) = \varrho(S)\,\mathfrak{c}\,S$ *nichtkonstant*, einen Vektor $\mathfrak{r}(S) = \varrho(S)\,\mathfrak{c}$ *konstant* nennen. Ferner wollen wir bei der Beschreibung des Vorganges der gegenseitigen Kürzung der Linearfaktoren in (23) davon sprechen, daß die zugehörigen *Vektoren* gegeneinander gekürzt werden. Wir bemerken hierzu, daß ein konstanter und ein nicht konstanter Vektor einander niemals proportional sein kann. Denn aus einer identisch in S bestehenden linearen Relation $\lambda(S)\,\varrho(S)\,\mathfrak{b} + \mu(S)\,\sigma(S)\,\mathfrak{c}\,S = \mathfrak{o}$ ($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ konstant, $\lambda, \mu, \varrho, \sigma$ algebraisch über $\mathfrak{k}(S)$) mit $\lambda \neq 0 \neq \mu$, $\varrho \neq 0 \neq \sigma, \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o} \neq \mathfrak{c}, \mathfrak{b} = \{b_1, b_2\}, \mathfrak{c} = \{c_1, c_2\}$ folgt

$$\mu\,\sigma\{b_2(c_1a + c_2c) - b_1(c_1b + c_2d)\} = 0$$

daher verschwindet die geschweifte Klammer als Polynom in S für alle S, und das ergibt mit dem Verschwinden von b_1c_1, b_1c_2, b_2c_1, b_2c_2 einen Widerspruch.

In den folgenden Erörterungen gilt es wie bisher als selbstverständlich, daß rückläufig numerierte Produkte den Wert Eins haben.

Es seien nun die Vektoren $\mathfrak{p}_i(S)$ $(1 \leqq i \leqq h_1)$ konstant, die Vektoren $\mathfrak{p}_i(S)$ $(h_1 + 1 \leqq i \leqq k)$ nicht konstant $(0 \leqq h_1 \leqq k)$; für $h > k$ haben sich die Vektoren $\mathfrak{p}_i(S)$ $(k + 1 \leqq i \leqq h)$ nach (22) bereits als nicht

konstant herausgestellt. Ferner seien die Vektoren $\mathfrak{q}_j\,(S)\,(1 \leqq j \leqq k_1)$ konstant, die Vektoren $\mathfrak{q}_j\,(S)\,(k_1+1 \leqq j \leqq k)$ nicht konstant $(0 \leqq k_1 \leqq k)$. Wir kürzen in (23) zunächst die h_1 konstanten $\mathfrak{p}_i\,(S)$ auf der linken gegen die h_1 konstanten $\mathfrak{p}_i\,(MS)$ $(1 \leqq i \leqq h_1)$ auf der rechten Seite, entsprechend die k_1 konstanten $\mathfrak{q}_j\,(S)$ auf der rechten gegen die k_1 konstanten $\mathfrak{q}_j\,(MS)$ $(1 \leqq j \leqq k_1)$ auf der linken Seite und erhalten dadurch aus (23) in abgekürzter Schreibweise die Gleichung

$$F_1 \overset{h}{\underset{i=1}{\Pi}} \overset{k}{\underset{i=h_1+1}{\Pi}} \overset{k}{\underset{j=k_1+1}{\Pi}} = G_1 \overset{k}{\underset{j=1}{\Pi}} \overset{k}{\underset{j=k_1+1}{\Pi}} \overset{h}{\underset{i=h_1+1}{\Pi}}, \tag{27}$$

in der F_1, G_1 Polynome aus $\mathfrak{k}\,[M, S]$ bezeichnen. Die nicht konstanten Vektoren in den mittleren Produkten müssen sich, wie bewiesen, gegen Faktoren der vorderen Produkte kürzen lassen, und in diesen fallen dadurch links $k - k_1$ Vektoren $\mathfrak{p}_i\,(M)\,S$ mit konstanten $\mathfrak{p}_i\,(S)$, rechts $k - h_1$ Vektoren $\mathfrak{q}_j\,(M)\,S$ mit konstanten $\mathfrak{q}_j\,(S)$ fort. Da in den übrigen Produkten die konstanten Vektoren $\mathfrak{p}_i\,(S)$, $\mathfrak{q}_j\,(S)$ bereits sämtlich verbraucht sind, bedeutet es keine Einschränkung, anzunehmen, daß vorn links die Faktoren mit $1 \leqq i \leqq k - h_1$, vorn rechts die Faktoren mit $1 \leqq j \leqq k - h_1$ fortfallen; dabei gilt $k - k_1 \leqq h_1$, $k - h_1 \leqq k_1$. So ergibt such aus (27)

$$F_2\,(M, S) \overset{h}{\underset{i=k-k_1+1}{\Pi}} (p_0'\,(M)\,\tau + p_i'\,(M)) \overset{k}{\underset{j=k_1+1}{\Pi}} (q_0\,(MS)\,\tau + q_j\,(MS)) = \tag{28}$$

$$= G_2\,(M, S) \overset{k}{\underset{j=k-h_1+1}{\Pi}} (q_0'\,(M)\,\tau + q_j'\,(M)) \overset{h}{\underset{i=h_1+1}{\Pi}} (p_0\,(MS)\,\tau + p_i\,(MS))$$

mit $F_2\,(M, S)$, $G_2\,(M, S) \subset \mathfrak{k}\,[M, S]$.

In dieser Indentität kann nach einer Bemerkung zu (23) eine Kürzung nur zwischen den Faktoren des vorderen Produkts auf der linken und des hinteren Produkts auf der rechten Seite, sowie zwischen den Faktoren des vorderen Produkts auf der rechten und des hinteren Produkts auf der linken Seite stattfinden. Daß die Anzahlen der Faktoren in den so zugeordneten Produkten paarweise übereinstimmen müssen, besagt $k - k_1 = h_1$; also, daß es genau so viele nichtkonstante $\mathfrak{q}_j\,(S)$ gibt, wie insgesamt konstante $\mathfrak{p}_i\,(S)$ $(1 \leqq i \leqq h)$, und genau so viele nicht konstante unter den $\mathfrak{p}_i\,(S)$ mit $1 \leqq i \leqq k$, wie konstante $\mathfrak{q}_j\,(S)$. Man erkennt, daß in allen vier Produkten von (28) über alle und nur diejenigen Indizes i, j $(1 \leqq i \leqq h,\ 1 \leqq j \leqq k)$ multipliziert wird, für die $\mathfrak{p}_i\,(S)$, $\mathfrak{q}_j\,(S)$ nicht konstant sind.

Eine Teilbarkeitsrelation der Gleichung (28) bedeutet z. B., daß $\lambda\, \mathfrak{q}_j\,(MS) + \mu\, \mathfrak{q}_l\,(M)\, S = \mathfrak{o}$ (λ, μ algebraisch über $\mathfrak{k}\,(M, S)$; $\lambda \neq 0 \neq \mu$; $j, l = k_1 + 1, \ldots, k$); sie erweist zunächst für M_0, S, bzw. M, S_0 in einer bezüglich λ, μ regulären Umgebung, sodann aber allgemein $\mathfrak{q}_j\,(M_0 S)\; S^{-1} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\, \mathfrak{q}_l\;(M_0)$ im verabredeten Sinne als konstanten Vektor, ferner

$$\mathfrak{q}_j(S) = -\frac{\mu}{\lambda}\, \mathfrak{q}_l(M_0) M_0^{-1} S = \varrho_1(S)\mathfrak{c}S, \mathfrak{q}_l(M) = -\frac{\lambda}{\mu}\varrho_1\,(MS_0)\mathfrak{c}M = \varrho_2(M)\,\mathfrak{c}\,M$$

als nicht konstante Vektoren mit demselben von τ, M, S unabhängigen $\mathfrak{c} = \{c_1, c_2\} \neq \mathfrak{o}$ und dabei

$$\varrho_1\,(S)\,(c_1 a + c_2 c) = \varrho_2\,(S)\,(c_1\; a + c_2 c) = q_0\,(S) \subset \mathfrak{k}\,[S]$$

als Polynom in S.

4. Um das *Ergebnis* unserer Überlegungen zu formulieren, beachten wir erstens, daß $|h—k|$ der Linearfaktoren in der Darstellung (19) von $R\;(\tau, S)$ zu $c\;\tau + d$ proportional sind, und zwar $h—k$ Faktoren des Zählers von $R\;(\tau, S)$, wenn $h > k$, $k—h$ Faktoren des Nenners von $R\;(\tau, S)$, wenn $k > h$. Da nach den Voraussetzungen $R\;(\tau, S)^{-1}$ mit $R\;(\tau, S)$ den Forderungen A. 1., 2. genügt, können und werden wir uns auf den Fall $h \geqq k$ beschränken. Hier ziehen wir die zu $c\;\tau + d$ proportionalen Linearfaktoren aus dem Zähler der Darstellung (19) heraus und erhalten zunächst

$$R(\tau, S) = H_0(S)\;(c\tau + d)^{r_0} \prod_{i=1}^{k} (p_0(S)\tau + p_i(S)) \prod_{j=1}^{k} (q_0(S)\tau + q_j(S))^{-1} \qquad (H_0(S) \subset \mathfrak{k}(S)) \tag{29}$$

Zweitens ergab die oben durchgeführte Diskussion eine Zuordnung zwischen den sämtlichen nicht konstanten $\mathfrak{q}_j\;(S)$ $(k_1 + 1 \leqq j \leqq k)$ und den sämtlichen konstanten $\mathfrak{p}_i\,(S)$ $(1 \leqq i \leqq h_1 = k—k_1)$ von der Gestalt

$$\begin{gathered} \mathfrak{q}_j\,(S) = \varrho_j\,(S)\;\mathfrak{c}\;S,\; \mathfrak{p}_i\,(S) = \sigma_i\,(S)\;\mathfrak{c}\;(\varrho_j, \sigma_i \subset \mathfrak{k}\,(S), \\ \mathfrak{c} \text{ konstant}, k_1 + 1 \leqq j \leqq k,\; 1 \leqq i \leqq h_1) \end{gathered} \tag{30}$$

und eine analoge Zuordnung zwischen den sämtlichen nicht konstanten $\mathfrak{p}_i\;(S)$, soweit für diese $i \leqq k$ (also $h_1 + 1 \leqq i \leqq k$) zutrifft, und den sämtlichen konstanten $\mathfrak{q}_j\;(S)$ $(1 \leqq j \leqq k_1 = k—h_1)$ von der Gestalt

$$\begin{gathered} \mathfrak{p}_i\,(S) = \sigma_i'\,(S)\;\mathfrak{c}'\;S,\; \mathfrak{q}_j\,(S) = \varrho_j'\,(S)\;\mathfrak{c}'\;(\varrho_j', \sigma_i' \subset \mathfrak{k}\,(S), \\ \mathfrak{c}' \text{ konstant}, h_1 + 1 \leqq i \leqq k,\; 1 \leqq j \leqq k). \end{gathered} \tag{31}$$

Für zwei im Sinne von (30), bzw. (31) einander zugeordnete Indizes i, j gilt deshalb

$$\frac{p_0(S)\,\tau + p_i(S)}{q_0(S)\,\tau + q_j(S)} = \frac{\sigma_i(S)}{\varrho_j(S)} \cdot \frac{c_1\tau + c_2}{(c_1a + c_2c)\tau + (c_1b + c_2d)},$$

$$\text{bzw.} = \frac{\sigma_i'(S)}{\varrho_j'(S)} \cdot \frac{(c_1'a + c_2'c)\tau + (c_1'b + c_2'd)}{c_1'\tau + c_2'}, \tag{32}$$

und damit ist nun die Struktur von $R(\tau, S)$ vollständig bestimmt: Nach (29), (32) hat $R(\tau, S)$ die Gestalt

$$R(\tau, S) = H(S)(c\tau + d)^r \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{i1} S\tau + \lambda_{i2}}{\lambda_{i1}\tau + \lambda_{i2}}\right)^{r_i} \tag{33}$$

mit festen komplexen $\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}\} \neq \{0, 0\}$, ganzen r, r_i $(1 \leqq i \leqq n)$ und $H(S) \subset \mathfrak{k}(S)$; man entnimmt dies der Darstellung

$$\frac{(c_1a + c_2c)\tau + (c_1b + c_2d)}{c_1\tau + c_2} = (c\tau + d)\frac{c_1 S\tau + c_2}{c_1\tau + c_2} \quad \left(S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right). \tag{34}$$

An (33) bestätigt man noch die Gültigkeit von (11) mit $\sigma_R(M, S) = \frac{H(M)\,H(S)}{H(MS)}$. Nach der gesamten Ableitung dieser Formel gilt schließlich (vgl. etwa (19), (30), (31)): $\lambda_{i1} \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$; $R(\tau, S)$ erhält also die Gestalt (12) mit

$$Q(\tau) = \prod_{i=1}^{n} (\tau - \lambda_i)^{r_i},\ \lambda_i = -\frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}}\ (1 \leqq i \leqq n). -$$

Im folgenden sei $\mathfrak{A}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Eine rationale Funktion F über $\mathfrak{A}$ in den n^2 Unbestimmten x_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ schreiben wir kurz in der Gestalt $F(X) = \frac{\varphi(X)}{\psi(X)}$ und verstehen dabei unter $\varphi(X)$, $\psi(X)$ Polynome in den x_{ik} über $\mathfrak{A}$, unter X die Matrix (x_{ik}). Bezeichnet $Y = (y_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ eine zweite Matrix mit unbestimmten Elementen, so gilt (unter der Voraussetzung, daß $\varphi(X)$ nicht mit dem Nullpolynom zusammenfällt) der folgende Satz:

Wenn F der Funktionalgleichung $F(X)\,F(Y) = F(XY)$ in den unbestimmten Matrizen X, Y genügt, so ist $F(X) = |X|^h$ eine Potenz der Determinante $|X|$ von X mit einem ganzen Exponenten $h \gtreqless 0$.

Zum Beweise bedienen wir uns der folgenden Hilfssätze:

1. Es sei $f(\mathfrak{u}) = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ein Polynom über $\mathfrak{A}$ in den m Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_m$, und es sei μ_i der größte Exponent, mit dem u_i in $f(\mathfrak{u})$ auftritt. Man kenne $\mu_1 + 1$ Werte $u_1(i_1)$ in $\mathfrak{A}$ $(0 \leqq i_1 \leqq \mu_1)$

und für jedes solche i_1: μ_2+1 Werte $u_2\,(i_1, i_2)$ in $\mathfrak{A}$ $(0 \leqq i_2 \leqq \mu_2)$ und für jedes Paar solcher i_1, i_2 : $\mu_3 + 1$ Werte $u_3\,(i_1, i_2, i_3)$ in $\mathfrak{A}$ $(0 \leqq i_3 \leqq \mu_3)$ usw. derart, daß f (u) für

$$u_1 = u_1\,(i_1),\ u_2 = u_2\,(i_1, i_2),\ \ldots,\ u_n = u_n\,(i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

verschwindet. Dann verschwindet f (u) identisch, d. h. es verschwinden alle Koeffizienten von f (u).

2. Es verschwinde f (u) nicht identisch. Man setze $u_i = u_{io}\, t^{K_i}$ mit einer neuen Unbestimmten t, festen $u_{io} \neq 0$ aus $\mathfrak{A}$ und festen ganzen K_i, für die

$$K_m \geqq 1,\ K_{m-1} > \mu_m K_m,\ \ldots,\ K_i > \mu_{i+1} K_{i+1} + \mu_{i+2} K_{i+2} + \ldots + \mu_m K_m.$$

Dann verschwindet f (u) für höchstens endlich viele Werte von t aus $\mathfrak{A}$.

3. Im Polynombereich $\mathfrak{A}\,[X]$ gilt der Satz von der eindeutigen Primfaktor-Zerlegung.

Beim Beweise des oben formulierten Satzes können und wollen wir voraussetzen, daß $\varphi\,(X)$ und $\psi\,(X)$ nicht beide konstant sind, und daß sie keinen gemeinsamen Faktor enthalten, es sei denn, daß dieser selbst konstant ist.

Es sei B eine beliebige feste umkehrbare n-reihige Matrix. Wir beweisen zunächst, daß $\varphi\,(B) \neq 0 \neq \psi\,(B)$ zutrifft. Zu diesem Zwecke bestimmen wir eine Matrix V über $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $|V| \neq 0$; b) $\varphi\,(VB) \neq 0 \neq \psi\,(VB)$; c) $\varphi\,(V^{-1}) \neq 0 \neq \psi\,(V^{-1})$.

Man erreicht a und b mit Hilfe von 2. leicht, wenn man bedenkt, daß nach 1. weder $\varphi\,(VB)$ noch $\psi\,(VB)$ identisch in V verschwindet. Um auch c zu realisieren, wende man 2. auf das Polynom $|X|^N \varphi\,(X^{-1})$ $\psi\,(X^{-1})$ an, wobei N den Grad von $\varphi\,(X)$ $\psi\,(X)$ bezeichnet. Nunmehr setze man $A = V^{-1}$. Dann gilt

$\alpha)$ $|A| \neq 0$; $\beta)$ $\varphi\,(A) \neq 0 \neq \psi\,(A)$; $\gamma)$ $\varphi\,(A^{-1}B) \neq 0 \neq \psi\,(A^{-1}B)$.

Die für eine unbestimmte Matrix X gebildete Zerlegung

$$\varphi\,(X)\,\varphi\,(A^{-1}B)\,\psi\,(XA^{-1}B) = \psi\,(X)\,\psi\,(A^{-1}B)\,\varphi\,(XA^{-1}B)$$

lehrt nun nach 3., daß $\varphi\,(XA^{-1}B)$, bzw. $\psi\,(XA^{-1}B)$, jeweils bis auf einen von Null verschiedenen konstanten Faktor mit $\varphi\,(X)$, bzw. $\psi\,(X)$ übereinstimmen müssen. Daraus folgt, daß $F\,(B)$ erklärt und von Null verschieden ist.

Für die *Jordansche Normalform* J von B gilt daher $F\,(B) = F\,(J)$. Es bezeichne $Z_p\,(x)$ eine quadratische Matrix des Grades n, die auf folgende Weise entsteht: Man entferne aus der n-reihigen Einheitsmatrix

$I^{(n)}$ eine Diagonalzelle von p konsekutiven Zeilen und Spalten $(1 \leqq p \leqq n)$ und ersetze sie durch die p-reihige Matrix $xI^{(p)} + M$, wo $M = (\delta_{i+1,\,k})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, p)$. Da man die Stellung dieser neuen Diagonalzelle in der Diagonale von $Z_p(x)$ durch Transformation mit einer umkehrbaren Matrix beliebig abändern kann, hängt $F(Z_p(x))$ nur von p und x ab. Offenbar ist $F(B)$ ein Produkt von Faktoren $F(Z_p(x))$ mit passend bestimmten x aus $\mathfrak{A}$ und natürlichen p. Jedes $F(Z_p(x))$ stellt eine rationale Funktion von x dar, die für jedes $x \neq 0$ aus $\mathfrak{A}$ erklärt und von Null verschieden ist. Daher gilt $F(Z_p(x)) = x^{h_p}$ mit einem nur von p abhängigen ganzen h_p.

Zum Abschluß des Beweises haben wir ersichtlich nur noch zu zeigen, daß $h_p = ph_1$ zutrifft. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die obige Matrix M durch Transformation mit Hilfe der p-reihigen Diagonalmatrix $\Lambda(t) = (t^{i-1}\,\delta_{ik})$ in $\Lambda(t)\,M\,\Lambda(t)^{-1} = t^{-1}M$ übergeführt wird. Es bezeichne $D_p(x)$ diejenige Diagonalmatrix, die man aus $Z_p(x)$ dadurch gewinnt, daß man in deren Diagonalzelle $xI^{(p)} + M$ die p-reihige Matrix M durch die p-reihige Nullmatrix ersetzt. Für eine mit Hilfe von $\Lambda(t)$ analog $D_p(x)$ zu erklärende Diagonalmatrix $T_p(t)$ ergibt sich nun

$$P(t, x) \equiv T_p(t)\,D_p(t)\,Z_p(x)\,T_p(t)^{-1} = Z_p(tx),$$

$$F(P(t, x)) = F(D_p(t))\,F(Z_p(x)) = t^{ph_1}\,x^{h_p} = F(Z_p(tx)) = (tx)^{h_p}$$

und damit die Behauptung. Der oben formulierte Satz gilt mit $h = h_1$.

5. Wir legen die am Ende des Abschnitts 1 und zu Beginn des Abschnitts 2 erklärten Bezeichnungen zu Grunde, setzen voraus, daß $R((\tau), (S))$ nicht identisch verschwindet und erkennen zunächst, daß die rationale Funktion $R((\tau), (S))$ der Funktionalgleichung (8a) für beliebige komplexe $\tau^{(\nu)}$ und beliebige komplexe zweireihige quadratische Matrizen $S^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}$ genügt — wenn man dabei von gewissen niederdimensionalen Ausnahme-Mannigfaltigkeiten im $9n$-dimensionalen komplexen Zahlenraum der $\tau^{(\nu)}$, $S^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}$ absieht.

Zu diesen Ausnahme-Mannigfaltigkeiten sei sogleich folgendes bemerkt:

Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit und soll daher angenommen werden, daß $R((\tau), (S))$ als Quotient teilerfremder Polynome vorgelegt ist. Wenn nun auch die Funktionalgleichung (8a) zunächst nur da gilt, wo alle drei in ihr enthaltenen Funktionen R einen Sinn haben, so folgt jetzt, daß man an einer Stelle, an der zwei dieser

Funktionen erklärt und von Null verschieden ist, die dritte durch die beiden anderen mit Hilfe der Funktionalgleichung (8a) definieren kann, und daß diese daher an der entsprechenden Stelle des $5n$- oder $9n$-dimensionalen Variabelnraumes gleichfalls erklärt und von Null verschieden sein muß. So ergibt sich nach dem Vorgehen in 2. insbesondere die fundamentale Tatsache, daß $R\ ((\tau), (S))$ für jedes System umkehrbarer komplexer $S^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ eine wohldefinierte und nicht identisch verschwindende rationale Funktion in den n komplexen Variabeln $\tau^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ darstellt.

Wir beweisen den in 1. angekündigten Satz durch vollständige Induktion nach n und bemerken zunächst, daß der Fall $n = 1$ durch die vorangehenden Untersuchungen erledigt ist. Wir zerlegen jedes der Systeme $\tau^{(\nu)}$, $S^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}\, S^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ auf die folgende einheitliche Weise in zwei Teilsysteme: Diese sind in leicht verständlicher Bezeichnung durch

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{t} = \{\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n_1)}\}, & \mathfrak{t}' = \{\tau^{(n_1+1)}, \ldots, \tau^{(n)}\}; \\ \mathfrak{S} = \{S^{(1)}, \ldots, S^{(n_1)}\}, & \mathfrak{S}' = \{S^{(n_1+1)}, \ldots, S^{(n)}\}; \\ \mathfrak{J} = \{I, \ldots, I\}, & \mathfrak{J}' = \{I, \ldots, I\}, \quad I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right); \\ \mathfrak{M} = \{M^{(1)}, \ldots, M^{(n_1)}\}, & \mathfrak{M}' = \{M^{(n_1+1)}, \ldots, M^{(n)}\}; \\ \mathfrak{M}\mathfrak{S} = \{M^{(1)}S^{(1)}, \ldots, M^{(n_1)}S^{(n_1)}\}, & \mathfrak{M}'\mathfrak{S}' = \{M^{(n_1+1)}\, S^{(n_1+1)}, \ldots, M^{(n)}S^{(n)}\} \end{array}\right. \tag{35}$$

erklärt, wo n_1 eine ein für allemal fest gewählte natürliche Zahl $< n$ angibt. Wir schreiben ferner $R\ ((\tau), (S))$ in der Gestalt

$$R\ (\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}; S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}) = R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') \tag{36}$$

und erhalten danach für die Funktionalgleichung (8a) die Darstellung

$$R\ (\mathfrak{S}\,\mathfrak{t}, \mathfrak{M}; \mathfrak{S}'\,\mathfrak{t}', \mathfrak{M}')\ R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{M}'\,\mathfrak{S}'). \tag{37}$$

Indem wir hier einmal $\mathfrak{S}' = \mathfrak{M}' = \mathfrak{J}'$, das andere Mal $\mathfrak{S} = \mathfrak{M} = \mathfrak{J}$ setzen, finden wir zunächst

$$R\ (\mathfrak{S}\,\mathfrak{t}, \mathfrak{M}; \mathfrak{t}', \mathfrak{J}')\ R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{J}') = R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{J}')$$

$$R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{J}; \mathfrak{S}'\,\mathfrak{t}', \mathfrak{M}')\ R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{J}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{J}; \mathfrak{t}', \mathfrak{M}'\,\mathfrak{S}')$$

und somit nach den Induktionsvoraussetzungen

$$R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{J}') = \left\{\prod_{\nu=1}^{n_1} \left(\left|S^{(\nu)}\right|^{h_\nu\,(c^{(\nu)}\,\tau^{(\nu)}+d^{(\nu)})^{r_\nu}}\right)\right\} \frac{Q\ (\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}{Q\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')} \tag{38}$$

$$R\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{J}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = \left\{\prod_{\nu=n_1+1}^{n} \left(\left|S^{(\nu)}\right|^{h_\nu\,(c^{(\nu)}\,\tau^{(\nu)}+d^{(\nu)})^{r_\nu}}\right)\right\} \frac{Q'\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')}{Q'\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')} \tag{39}$$

Die hier neu eingeführten Symbole h_ν, r_ν, Q, Q', haben die folgenden Bedeutungen: In (38) sei $\mathfrak{t}'$ fest gewählt; dann sind h_ν, r_ν $(1 \leqq \nu \leqq n_1)$ feste ganze Zahlen, $Q(\mathfrak{t},\mathfrak{t}')$ ist eine feste rationale Funktion von $\mathfrak{t}$ (d. h. von den $\tau^{(\nu)}$ $1 \leqq \nu \leqq n_1$). In (39) sei $\mathfrak{t}$ fest gewählt; dann sind h_ν, r_ν $(n_1 + 1 \leqq \nu \leqq n)$ feste ganze Zahlen, $Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ ist eine feste rationale Funktion von $\mathfrak{t}'$ (d. h. von den $\tau^{(\nu)}$, $n_1 + 1 \leqq \nu \leqq n$).

Wir zeigen zunächst, daß in (38) $Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$, in (39) $Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ als wohlbestimmte rationale Funktionen in $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ (d. h. in allen $\tau^{(\nu)}$, $1 \leqq \nu \leqq n$) gewählt werden können. Zum Beweise beschränken wir uns auf die Funktion $Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ in (38). Wir setzen in dieser Gleichung

$$S^{(\nu)} = U^{z^{(\nu)}} = \begin{pmatrix} 1 & z^{(\nu)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \leqq \nu \leqq n),\ \mathfrak{z} = \{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$$

und erhalten aus (38)

$$R(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = \frac{Q(\mathfrak{t} + \mathfrak{z}, \mathfrak{t}')}{Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')};$$

der Quotient auf der rechten Seite ist also eine rationale Funktion von $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ und $\mathfrak{z}$. Wir bestimmen nun einen festen Vektor $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$, für den diese rationale Funktion von $\mathfrak{t}'$ und $\mathfrak{z}$ erklärt und von Null verschieden ist. Mit $\mathfrak{w} = \mathfrak{t} + \mathfrak{z}$ erweist sich sodann $\dfrac{Q(\mathfrak{w}, \mathfrak{t}')}{Q(\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}')}$ als eine wohlbestimmte und von Null verschiedene rationale Funktion von $\mathfrak{t}'$ und $\mathfrak{w}$; indem man die Funktion $Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ in (38) durch den Quotienten $\dfrac{Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}{Q(\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}')}$ ersetzt, gewinnt man eine neue Darstellung von $R(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}')$ nach Art von (38), in der jetzt $Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ eine wohlbestimmte und nicht identisch verschwindende rationale Funktion in $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ (d. h. in den sämtlichen $\tau^{(\nu)}$, $1 \leqq \nu \leqq n$) angibt. Es ist nach der obigen Herleitung selbstverständlich, daß das neue Q von den h_ν, r_ν nicht abhängt.

Daß auch keine der Zahlen h_ν, r_ν $(1 \leqq \nu \leqq n_1)$ von $\mathfrak{t}'$ abhängt, läßt sich nun sehr leicht einsehen. Zunächst wird mit $S^{(\nu)} = \lambda^{(\nu)} I$ ($\lambda^{(\nu)}$ komplex, $1 \leqq \nu \leqq n_1$)

$$R(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = \prod_{\nu=1}^{n_1} (\lambda^{(\nu)})^{2h_\nu + r_\nu}$$

eine rationale Funktion von den $\lambda^{(\nu)}$ allein, mithin ist jede Verbindung $2h_\nu + r_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq n_1)$ von $\mathfrak{t}'$ unabhängig. Ferner setze man

$$S^{(\nu)} = I \ (1 \leqq \nu \leqq n_1,\ \nu \neq m),\ S^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ (m = 1, 2, \ldots, n_1);$$

das gibt

$$R(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{F}) = \tau^{(m)^{r_m}} \frac{Q(\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}{Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')},$$

erweist $\tau^{(m)^{r_m}}$ als rationale Funktion von $\tau^{(m)}$ allein und r_m als von $\mathfrak{t}'$ unabhängig.

Damit sind alle oben genannten Behauptungen bewiesen. Wir können demnach nun von der Annahme ausgehen, daß die ganzen Zahlen h_ν, r_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ und die rationalen Funktionen $Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'), Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ von den $\tau^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ durch die vorgegebene rationale Funktion $R((\tau), (S))$ allein eindeutig bestimmt sind.

Wir kommen zur Durchführung des angekündigten *Induktionsbeweises*. Aus (37) folgt mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}, \mathfrak{M}' = \mathfrak{F}'$:

$$R(\mathfrak{t}, \mathfrak{M}; \mathfrak{S}'\mathfrak{t}', \mathfrak{F})\, R(\mathfrak{t}, \mathfrak{F}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = R(\mathfrak{t}, \mathfrak{M}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}')$$

oder

$$R(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = R(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{S}'\mathfrak{t}', \mathfrak{F})\, R(\mathfrak{t}, \mathfrak{F}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}').$$

Dies gibt nach (38), (39)

$$R(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = \left(\prod_{\nu=1}^{n} |S^{(\nu)}|^{h_\nu (c^{(\nu)}\tau^{(\nu)} + d^{(\nu)})^{r_\nu}} \right) \frac{Q(\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')}{Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')} \frac{Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')}{Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}. \tag{41}$$

Da sowohl die linke Seite als auch das Produkt $\prod_{\nu=1}^{n}$ auf der rechten Seite von (41) der Funktionalgleichung (37) genügt, gilt diese offenbar auch für die rationale Funktion

$$R_0(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}; \mathfrak{t}', \mathfrak{S}') = \frac{Q(\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')}{Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')} \frac{Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')}{Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}$$

und bedeutet, wie man elementar nachrechnet, daß die rationale Funktion

$$P(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}') = \frac{Q'(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}{Q(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}$$

der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$P(\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{M}'\mathfrak{S}'\mathfrak{t}')\, P(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}') = P(\mathfrak{t}, \mathfrak{M}'\mathfrak{S}'\mathfrak{t}')\, P(\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}'). \tag{42}$$

Hier ersetze man $\mathfrak{S}'\mathfrak{t}'$ durch $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{M}'$ durch $\mathfrak{S}'$. Dann gilt nach (42):

$$P(\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}') = \frac{P(\mathfrak{t}, \mathfrak{S}'\mathfrak{t}')\, P(\mathfrak{S}\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}{P(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')}. \tag{43}$$

Dieser Gleichung entnimmt man ohne Schwierigkeiten, daß $P(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ als Produkt einer rationalen Funktion $F(\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{t}$ d. h. der $\tau^{(\nu)}$, $1 \leqq \nu \leqq n_1$) mit einer rationalen Funktion $G(\mathfrak{t}')$ von $\mathfrak{t}'$ (d. h. der $\tau^{(\nu)}$,

$n_1 + 1 \leqq \nu \leqq n$) dargestellt werden kann. Zu diesem Zwecke trage man in (43) für t, t′ passende konstante Vektoren t_0, t'_0 ein und deute $\mathfrak{S}\, t_0$, $\mathfrak{S}'\, t'_0$ als neue variable Vektoren $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$. Dann ergibt sich in der Tat

$$P(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') = \frac{P(t_0, \mathfrak{z}')\, P(\mathfrak{z}, t'_0)}{P(t_0, t'_0)} = F(\mathfrak{z})\, G(\mathfrak{z}')$$

und nunmehr

$$Q'(t, t') = Q(t, t')\, F(t)\, G(t'),$$

sowie nach (41)

$$R(t, \mathfrak{S}; t', \mathfrak{S}') = \left(\prod_{\nu=1}^{n} |S^{(\nu)}|^{h_\nu} (c^{(\nu)}\, \tau^{(\nu)} + d^{(\nu)})^{r\nu} \right) \frac{Q_0(\mathfrak{S}\, t, \mathfrak{S}'\, t')}{Q_0(t, t')}$$

mit der in den sämtlichen $\tau^{(\nu)}$ ($1 \leqq \nu \leqq n$) ersichtlich rationalen Funktion

$$Q_0(t, t') = Q(t, t')\, G(t').$$

Dies aber ist die einleitend formulierte Behauptung.

The linear mappings of the E_n into itself.

By
Walther Mayer †*
Institute for Advanced Study, Princeton, N. J.

(Received May 26, 1948.)

This paper is a brief but complete study of the linear mappings of an n-dimensional vector space (over a field K) into itself. No use is made of coordinates and hence of matrices representing linear mappings. The tools applied are polynomials in linear mappings, espicially "index-polynomials" defined in § 1. The closing main-theorem characterizes classes of equivalent mappings in terms of mappings alone.

The literature on the subject is extensive, the algebraic approach in *H. Weyl:* Mathem. Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, *O. Schreier* und *E. Sperner:* Vorlesung über Matrixen, Leipzig 1932, *Van der Waerden:* Moderne Algebra II, Berlin 1931, was stimulating in the preparation of this paper.

§ 1. Indexpolynomial of a vector λ with respect to a mapping A of the E_n.

Let E_n denote the n-dimensional vector space over the algebraically closed field K and A, B, C, ... linear mappings of the E_n into itself,

$$\lambda' = A\,\lambda, \quad \lambda, \lambda' \,\varepsilon\, E_n \tag{1.1}$$

such that

$$A\,\sigma\,\lambda = \sigma\,A\,\lambda, \quad A\,(\lambda+\mu) = A\,\lambda + A\,\mu, \quad \sigma\,\varepsilon\,K, \quad \lambda, \mu\,\varepsilon\,E_n. \tag{1.2}$$

Linear mappings of the E_n into itself can be added

---

* *W. Mayer*, geboren 1887 in Graz, studierte in Wien, Zürich, Göttingen und Paris. 1912 in Wien promoviert, wurde er 1915 an der russischen Front schwer verwundet. Er habilitierte sich 1926 für Mathematik an der Wiener Universität und erhielt 1931 den Titel eines a. o. Professor. Er lebte seit 1935 in Amerika, als Associate des Princetoner Instituts. Er starb am 10. 9. 1948.

Mayers Arbeiten behandeln zum größten Teil Fragen der Differentialgeometrie; am bekanntesten wurde er durch das gemeinsam mit *A. Duschek*, verfaßte Lehrbuch über diese Disziplin, dessen 2. Band (Riemannsche Geometrie) *Mayers* geistiges Eigentum ist.

$$(A + B)\,\lambda = A\,\lambda + B\,\lambda, \tag{2.1}$$

multiplied by elements of K

$$(\sigma\,A)\,\lambda = \sigma\,(A\,\lambda), \tag{2.2}$$

and multiplied mutually

$$(A\,B)\,\lambda = A\,(B\,\lambda), \tag{2.3}$$

all of which operations are closed in the set of linear mappings. Thus we may speak of polynomials in linear mappings with elements of K as coefficients. We concern ourself with polynomials P, Q, R, ... in one (undetermined) *linear mapping* A, say

$$a_0\,A^m + a_1\,A^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\,A + a_m\,I, \quad a_0, \ldots a_m \,\varepsilon\, K \tag{3.1}$$

I the identy mapping, and for such polynomials all the rules for polynomials in the undertermined x

$$a_0\,x^m + a,\,x^{m-1} + \ldots \quad + a_{m-1}\,x + a_m \tag{3.2}$$

hold:

$$((\Sigma\,a_\nu\,P_\nu)\,(\Sigma\,b_\mu\,Q_\mu) = \Sigma\,a_\nu\,b_\mu\,P_\nu\,Q_\mu,\ PQ = QP, \quad a_\nu, b_\mu\,\varepsilon\,K. \tag{3.3}$$

By 0* we denote the zero-mapping, such that for any $\lambda\,\varepsilon\,E_n$

$$0^*\,\lambda = 0, \text{ the zero-vector of } E_n. \tag{3.4}$$

The index and the indexpolynomial of a vector λ with respect to A: *The* vector $\lambda \neq 0$ has the index m with respect to a mapping A, if the m vectors

$$\lambda,\ A\,\lambda, \ldots \quad A^{m-1}\,\lambda, \tag{4.1}$$

are independent, while

$$A^m\,\lambda = \sigma_1\,\lambda + \sigma_2\,A\,\lambda + \ldots + \sigma_m\,A^{m-1}\,\lambda,\ \sigma_1, \ldots \sigma_m\,\varepsilon\,K. \tag{4.2}$$

Hence is

$$(A^m - \sigma_m\,A^{m-1} - \ldots \quad - \sigma_2\,A - \sigma_1\,I)\,\lambda = 0 \tag{4.3}$$

the relation of least degree in A satisfied by the given A and λ. By this is determined up to a factor (element of K) the polynomial

$$P_m = A^m - \sigma_m\,A^{m-1} - \ldots \quad - \sigma_2\,A - \sigma_1\,I, \tag{4.4}$$

which we name the *indexpolynomial of λ with respect to A* or briefly an *indexpolynomial of the given A*. The degree of the indexpolynomial (which is the index of λ) is $\leqslant n$. Vectors of index 1 are called Eigenvectors of A, for an Eigenvector λ (4.3) becomes

$$(A - \sigma\,I)\,\lambda = 0, \quad \sigma\,\varepsilon\,K. \tag{4.5}$$

The element σ in (4.5) is named an Eigen-value of A (corresponding to the Eigen-vector). Due to the special nature of the E_n (K is algebraically closed) Eigen-vectors and Eigen-values of A always exist. This

fact we prove without the use of coordinates by means of the Lemma: *Let* $\varrho_1, \ldots \varrho_m \varepsilon K$ *be the roots of the polynomial in* K

$$\varphi_m(x) = x^m - \sigma_m x^{m-1} - \ldots - \sigma_2 x - \sigma_1, \quad \sigma_1, \ldots \sigma_m \varepsilon K, \tag{5.1}$$

then for the undetermined mapping A

$$\varphi_m(A) = A^m - \sigma_m A^{m-1} - \ldots - \sigma_2 A - \sigma_1 I = \\ = (A - \varrho_1 I)(Q - \varrho_2 I) \ldots (A - \varrho_m I) \tag{5.2}$$

holds.

The lemma follows from $\varphi_m(x) = (x - \varrho_1)(x - \varrho_2) \ldots (x - \varrho_m)$ and our above remark on polynomials in the linear mapping A. For P_m the indexpolynomial of λ we rewrite (4.3) to obtain

$$(A - \varrho_1 I)(A - \varrho_2 I) \ldots (A - \varrho_m I)\lambda = 0. \tag{6.1}$$

Since

$$\mu_\alpha = (A - \varrho_1 I) \ldots (A - \varrho_{\alpha-1} I)(A - \varrho_{\alpha+1} I) \ldots (A - \varrho_m I)\lambda \neq 0 \tag{6.2}$$

and

$$(A - \varrho_\alpha I)\mu_\alpha = 0, \tag{6.3}$$

we have proved the existence of an Eigen-vector μ_α of A and the Eigen-value ϱ_α. In fact we have established

Theorem 1: *The elements* $\varrho_1, \ldots \varrho_m$ *of* K *occurring in the product decomposition*

$P_m = (A - \varrho_1 I)(A - \varrho_2 I) \ldots (A - \varrho_m I)$ *of an indexpolynomial of* A *are Eigen-values of* A.

Theorem 1 asserts that the first degree factors $(A - \varrho I)$ of an indexpolynomial are indexpolynomials. We shall prove this fact for any factor of an indexpolynomial. Let in fact

$$P_m = Q_s R_t,\ s + t = m,\ I \leqslant s, t \tag{7.1}$$

be a decomposition of the indexpolynomial P_m of λ in two factor polynomials of degrees s and t respectively. Then

$$\mu = R_t \lambda \neq 0, Q_s \mu = 0. \tag{7.2}$$

Thus is μ of index $a \leqslant s$. Let S_a be the indexpolynomial of μ; from $S_a \mu = 0$ then follows

$$S_a R_t \lambda = 0. \tag{7.3}$$

But since λ is of index m, $a + t \geqslant m$, or $a \geqslant s$ follows. Thus is $a = s$ and Q_s the indexpolynomial of μ.

Theorem 2: *Any factor of an indexpolynomial of* A *is an indexpolynomial of* A. More definitely: *If* $P_m = Q_s R_t$, $s + t = m$, *is the indexpolynomial of* λ *with respect to* A *then is* Q_s *the indexpolinomial of* $R_t \lambda$ *with respect to* A.

Let $m \geqslant r$ and S_m and J_r be two A-polynomials of degrees m and r respectively. Then A-polynomials U_{m-r} and V_t of degrees $m—r$ and $t < r$ can be found such that

$$S_m = U_{m-r} J_r + V_t, \quad t < h. \tag{8}$$

Let for a given A now J_r be the indexpolynomial of a vector μ and S_m such that also $S_m \mu = 0$ for that A. Then (8), $V_t \mu = 0$ for A and thus $(t < r)$ $V_t \equiv 0$.

Theorem 3: *The indexpolynomial of μ with respect to A is a factor of any polynomial S such that $S \mu = 0$ (for A).*

The basic-polynomial of A. Let λ_α, $\alpha = 1, \ldots n$, be a vector-basis of the E_n and denote by $P^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots n$, the indexpolynomial of λ_α with respect to a mapping A. We now consider polynomials P which vanish for A (i. e. $P \lambda = 0$ for A and any $\lambda \varepsilon E_n$). Necessary and sufficient for that property is $P \lambda_\alpha = 0$ for A, $\alpha = 1, \ldots n$. But $P \lambda_\alpha = 0$ if and only if P has $P^{(\alpha)}$ as a factor (theorem 3). Thus we have.

Theorem 4: *The least common multiple of the indexpolynomials with respect to A of the vectors $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ of a basis of the E_n is the polynomial of least degree annulled by A. This polynomial is called the basic-polynomial of A and as its symbol we choose P^*.*

From either of the theorems 3 and 4 follows that any indexpolynomial of A is a factor of P^*. Since for ϱ an Eigen-value of A $(A — \varrho I)$ is an indexpolynomial of A, it follows *that there is only a finite number of Eigen-values of a mapping A.*

We now charcterize the basic-polynomial P^* of A in

Theorem 5: *Let $\varrho_1, \ldots \varrho_r$, be the Eigen-values of A and m_α the greatest integer such that*

$$(A — \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}, \alpha = 1, \ldots r, \tag{9.1}$$

is an indexpolynomial $(1 \leqslant m_\alpha)$. *Then*

$$P^* = \prod_{\alpha=1}^{r} (A — \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}. \tag{9.2}$$

The proof will be given in the next section where in addition, we show that P^* is an indexpolynomial of A. This section we close with

Theorem 6: *Necessary and sufficient that a vector λ is of index m with respect to A is the occurrence of a relation*

$$P_m \lambda = 0, P_m = (A — \varrho_1 I) \ldots (A — \varrho_m I), \tag{10}$$

while each of the m relations derived from (10) *in deleting a factor $(A — \varrho_\alpha I)$ is invalid. P_m then is the indexpolynomial of λ.*

We have only to prove the sufficiency of the proposition. By (10) is the indexpolynomial of λ a factor, say $Q_{r'} = (A - \varrho_1 I) \ldots (A - \varrho_{r'} I)$ of P_m (theorem 3). If $r' < m$ then $(A - \varrho_1 I) \ldots (A - \varrho_{m-1} I)\, \lambda$ follows from $Q_{r'}\, \lambda = 0$, contradicting the proposition. Thus is $r' = m$ and the theorem is proved.

§ 2. The vector spaces $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots r$.

Let U be a linear mapping of the E_n into itself. By NU we denote the vector spaces of all vectors mapped into the zero-vector by U, thus

$$\lambda \varepsilon NU \text{ if } U\lambda = 0 \tag{1}$$

(Since U is linear, NU is a linear subspace of the E_n). We now consider the r spaces $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ corresponding to the r mappings which appear in (9.2), § 1. Since

$$\lambda \varepsilon N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha} \longleftrightarrow (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha} \lambda = 0, \tag{2.1}$$

the space $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ *is the space of all vectors with indexpolynomials a power of* $(A - \varrho_\alpha I)$ (theorem 3 and definition of m_α in theorem 5). $N\,(A - \varrho\, I_\alpha)^{m_\alpha}$ *is an invariant space with respect to the mapping* A, i. e.

$$\lambda \varepsilon N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha} \longrightarrow A\,\lambda \varepsilon N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}. \tag{2.2}$$

Denote by d_α the dimension of $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$, then

$$d_\alpha \geqslant m_\alpha. \tag{2.3}$$

In fact is $(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ the indexpolynomial of some λ (of index m_α), thus $(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}\, \lambda = 0$ and as a consequence $(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}\, A^t \lambda = 0$, $t = 1, 2, \ldots m_\alpha - 1$. Thus $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ contains the m_α independent vectors λ, $A\,\lambda$, $\ldots$ $A^{m_\alpha - 1}\,\lambda$, which proves (2.3).

We shall now prove that the spaces $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots r$, are independent and span E_n:

Theorem 7: *The vector spaces* $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ *are independent.*

We disprove the occurence of a non-trivial relation

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha = 0,\ \lambda_\alpha \varepsilon N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}. \tag{3.1}$$

Assume $\lambda_1 \neq 0$ and multiply (3.1) at the left by

$$\prod_{\alpha=2}^{r} (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}, \tag{3.2}$$

to obtain

$$\prod_{\alpha=\lambda}^{r} (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}\, \lambda_1 = 0. \tag{3.3}$$

By theorem 3 is the indexpolynomial of λ, a factor of (3.2), but it is a power of $(A - \varrho_1 I)$ and since $\varrho_1 \neq \varrho_2, \ldots \varrho_r$, we have a contradiction.

Since to each Eigenvalue ϱ_α of A corresponds a space $N(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ it follows from the theorem *that there are at most n Eigen-values of A.*

Theorem 8: *Any vector λ of E_n has a representation*

$$\lambda = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha, \quad \lambda_\alpha \varepsilon N(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}, \tag{4}$$

which by theorem 7 is unique. Thus is $\Sigma d_\alpha = n$, $d_\alpha = dim\, N(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$.
Proof: The indexpolynomial P_m of λ by theorem 1 has the product-representation, say

$$P_m = \prod_{\alpha=1}^{k} (A - \varrho_\alpha I)^{r_\alpha}, \; 0 < r_\alpha, \; \sum_{\alpha=1}^{k} r_\alpha = m. \tag{5.1}$$

For $k = 1$ (by definition of m_α in theorem 5) is P_m factor of $(A - \varrho_1 I)^{m_1}$ thus is $\lambda \varepsilon N(A - \varrho_1 I)^{m_1}$ according to the theorem. For $k > 1$ denote by $P^{(\alpha)}_{m-r_\alpha}$ the polynomial derived from P_m in deleting $(A - \varrho_\alpha I)^{r_\alpha}$. By theorem 2 is $(A - \varrho_\alpha I)^{r_\alpha}$ the indexpolynomial with respect to A of

$$\mu_\alpha = P^{(\alpha)}_{m-r_\alpha} \lambda, \quad \alpha = 1, \ldots k. \tag{5.2}$$

Thus by the definition of m_α is

$$r_\alpha \leqslant m_\alpha, \tag{5.3}$$

and P_m a factor of P^*. The r_α-dimensional $V^{r_\alpha}(\mu_\alpha, A\mu_\alpha, \ldots A^{r_\alpha - 1}\mu_\alpha)$ generated by μ_α is a subspace of the m-dimensional $V^m(\lambda, A\lambda, \ldots A^{m-1}\lambda)$ generated by λ, since (5.2), μ_α and thus $A\mu_\alpha, A^2\mu_\alpha, \ldots$ are in the A-invariant $V^m(\lambda, A\lambda, \ldots A^{m-1}\lambda)$. In this manner contains V^m the k rows of independent vectors

$$\mu_\alpha, A\mu_\alpha, \ldots A^{r_\alpha - 1}\mu_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots k, \tag{6}$$

of which the written row is in $N(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ (by (5.3) and $(A - \varrho_\alpha I)^{r_\alpha} \mu_\alpha = 0$). Since by theorem 7 no relation between vectors of different rows (6) exist, all the $\Sigma r_\alpha = m$ vectors (6) are independent and hence form a basis of the V^m. But $\lambda \varepsilon V^m$ and thus expressible by the vectors (6), proving the theorem.

We now proceed with the proof of theorem 5:

First of all is

$$\prod_{\alpha=1}^{r} (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha} = 0^*, \tag{7}$$

since this polynomial has any indexpolynomial as a factor and thus

maps any vector into the zero of E_n. Now for its indexpolynomial-property: To $(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ as an indexpolynomial there exists a vector λ_α such that

$(A-\varrho_\alpha I)^{m_\alpha} \lambda_\alpha = 0, (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha - 1} \lambda_\alpha \neq 0, \alpha = 1, \ldots r, (A-\varrho_\alpha I)^0 = I.$ Thus (8.1)

$$\prod_{\alpha=1}^{r} (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha} \sum_{\beta=1}^{r} \lambda_\beta = 0, \tag{8.2}$$

but any relation derived from (8.2) in deleting a factor $(A - \varrho_\alpha I)$ is invalid.

(In fact

$$(A - \varrho_1 I)^{m_1 - 1} \prod_{\alpha=2}^{m} (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha} \lambda_1 \neq 0, \tag{8.3}$$

since the A-polynomial in (8.3) has not $(A - \varrho_1 I)^{m_1}$, the indexpolynomial of λ_1, as a factor (theorem 3)). *Thus by theorem 6 is* $\Pi (A-\varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots r$, *the indexpolynomial of* $\Sigma \lambda_\beta$. As an indexpolynomial is $\pi (A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots r$, factor of any polynomial annulled by A (theorem 3) and *hence* (7) *the polynomial of least degree of that property, i. e., the basic-polynomial.* Thus theorem 5 is proved and in addition.

Theorem 9: *The basic-polynomial of A is an indexpolynomial of A with the property that the totality of its factors is also the totality of the indexpolynomials of A.*

In fact is any indexpolynomial factor of P^* and any factor of P^* (theorem (2) an indexpolynomials of A.

§ 3. The structure of $N (A-\varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$.

$N (A - \varrho_\alpha I)^{t-1}$ is a subspace of $N (A - \varrho_\alpha I)^t$ and a *proper* subspace if $(A - \varrho_\alpha I)^t$ is an indexpolynomial, since then for some vector λ we have $(A - \varrho_\alpha I)^t \lambda = 0$ and $(A - \varrho_\alpha I)^{t-1} \lambda \neq 0$.

Let ϱ denote an Eigen-value of A and m be such that $(A - \varrho I)^m$ is an indexpolynomial of A, then in the chain of inclusions

$$N (A - \varrho I) \subset N (A - \varrho I)^2 \subset \ldots \quad \subset N (A - \varrho I)^m, \tag{1}$$

is each space a proper subspace of the following one. By

$\nu_t = \dim N (A - \varrho_\alpha I)^t - \dim N (A - \varrho_\alpha I)^{t-1}, \; t = 1, \ldots, m,$ (2.1)

or by

$$\dim N (A - \varrho_\alpha I)^t = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_t, \; t = 1, \ldots m, \tag{2.2}$$

we introduce the *positive* integers $\nu_1, \ldots, \nu_m$ and then choose a basis of $N (A - \varrho I)^m$ whose $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_t)$ first vectors

$$\lambda_1^{(1)}, \ldots \lambda_{\nu_1}^{(1)}; \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_{\nu_2}^{(2)}; \ldots \lambda_1^{(t)}, \ldots \lambda_{\nu t}^{(t)}, \tag{3.1}$$

span $N\,(A - \varrho\, I)^t$, $t = 1, \ldots m$. Thus is

$$\lambda_1^{(t)}, \ldots \lambda_{\nu t}^{(t)}, \text{ a basis of } N\,(A - \varrho\, I)^t \text{ modulo } N\,(A - \varrho\, I)^{t-1} \tag{3.2}$$

of dimension ν_t. *For $t \geqq s$ the ν_t vectors*

$$\mu_\sigma = (A - \varrho\, I)^{t-s}\, \lambda_\sigma^{(t)}, \quad \sigma = 1, \ldots \nu_t, \, t = 1, \ldots m, \tag{4}$$

are in $N\,(A - \varrho\, I)^s$ and independent modulo $N\,(A - \varrho\, I)^{s-1}$.

Proof: $\mu_\sigma \varepsilon\, N\,(A - \varrho\, I)^s$, since $(A - \varrho\, I)^s\, \mu_\sigma = (A - \varrho\, I)^t\, \lambda_\sigma^{(t)} = 0$. A relation $\Sigma\, a_\sigma\, \mu_\sigma = 0$ modulo $N\,(A - \varrho\, I)^{s-1}$, i. e.

$$\Sigma\, a_\sigma\, (A - \varrho\, I)^{t-s}\, \lambda_\sigma^{(t)} = 0 \text{ modulo } N\,(A - \varrho\, I)^{s-1}, \tag{5.1}$$

or

$$(A - \varrho\, I)^{s-1}\, \Sigma\, a_\sigma\, (A - \varrho\, I)^{t-s}\, \lambda_\sigma^{(t)} = (A - \varrho\, I)^{t-1}\, \Sigma\, a_\sigma\, \lambda_\sigma^{(t)} = 0 \tag{5.2}$$

is equivalent to $\Sigma\, a_\sigma\, \lambda_\sigma^{(t)} = 0$ modulo $N\,(A - \varrho\, I)^{t-1}$, and thus follows $a_\sigma = 0$, $\sigma = 1, \ldots \nu_t$.

The above fact allows the choice of the ν_t vectors (4) as a part-basis of the space $N\,(A - \varrho\, I)^s$ modulo $N\,(A - \varrho\, I)^{s-1}$. In addition it shows $\nu_s \geqq \nu_t$ for $t > s$, or

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \quad \geqslant \nu_m > 0. \tag{6}$$

In the construction of the basis (3.1) of $N\,(A - \varrho\, I)^m$ we shall adhere to that choice to obtain relations

$$\left\{\begin{array}{lll} (A - \varrho\, I)\, \lambda_\sigma^{(m)} & = \lambda_\sigma^{(m-1)}, & \sigma = 1, \ldots \nu_m, \\ (A - \varrho\, I)\, \lambda_\sigma^{(m-1)} & = \lambda_\sigma^{(m-2)}, & \sigma = 1, \ldots \nu_{m-1}, \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ (A - \varrho\, I)\, \lambda_\sigma^{(2)} & = \lambda_\sigma^{(1)}, & \sigma = 1, \ldots \nu_2, \\ (A - \varrho\, I)\, \lambda_\sigma^{(1)} & = 0, & \sigma = 1, \ldots \nu_1, \end{array}\right. \tag{7}$$

which fully describe the mapping A inside of the A-invariant $N\,(A - \varrho\, I)^m$ (by the knowledge of the mapping of the basis of that space).

The above basis construction (3.1) with relations (7) we apply to each of the r spaces $N\,(A - \varrho_\alpha\, I)^{m_\alpha}$ of § 2 which span the E_n, $\alpha = 1, \ldots r$. For $N\,(A - \varrho_\alpha\, I)^{m_\alpha}$, the set $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_m$, is now replaced by the dimensions

$$\nu_t^\alpha = \text{dimension of } N\,(A - \varrho_\alpha\, I)^t \text{ mod } N\,(A - \varrho_\alpha\, I)^{t-1}, \; t = 1, \ldots m_\alpha, \tag{8.1}$$

which together with ϱ_α fully describe the mapping A in $N\,(A - \varrho_\alpha\, I)^{m_\alpha}$ and for which

$$\nu_1^\alpha \geqslant \nu_2^\alpha \geqslant \ldots \quad \geqslant \nu_m^\alpha > 0, \tag{8.2}$$

hold together with

$$\sum_{\sigma=1}^{m_\alpha} \nu_\sigma^\alpha = d_\alpha = \dim N\,(A - \varrho_\alpha\, I)^{m_\alpha}. \tag{8.3}$$

We are now able to state the main.—

Theorem 10: *The Eigen-values* $\varrho_1, \ldots \varrho_r$ of A, $r \leqslant n$, *together with the above dimensions* ν_t^α, $t = 1, \ldots m_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots r$ *determine the mapping* A *up to equivalence.*

In fact is a linear mapping A fully determined if determined for each of the A-invariant $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots r$, which span the E_n. But relations (7) determine those mappings in terms of ϱ_α and ν_t^α, $t = 1, \ldots m_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots r$. Thus for two mappings A and $\overset{\frown}{A}$ corresponding in these values a one to one mapping M: $\lambda \longleftrightarrow \overset{\frown}{\lambda}$ of the vectors of the E_n can be found such that $\lambda \longleftrightarrow \overset{\frown}{\lambda}$ implies $A\,\lambda \longleftrightarrow \overset{\frown}{A}\,\overset{\frown}{\lambda}$. Hence $\overset{\frown}{\lambda} = M\,\lambda$ implies $\overset{\frown}{A}\,\overset{\frown}{\lambda} = M\,A\,\lambda$, i. e. $\overset{\frown}{A}\,M\,\lambda = M\,A\,\lambda$, for any $\lambda \varepsilon E_n$. Thus $\overset{\frown}{A}\,M = M\,A$ or $\overset{\frown}{A} = M\,A\,M^{-1}$, proving the theorem.

Corollary: *To a given set of at most* n *elements* $\varrho_1, \ldots \varrho_r$, *of* K *and integers* ν_t^α, $t = 1, \ldots m_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots r$, *satisfying* (8.2) *and* $\Sigma\, d_\alpha = n$ (8.3), *there is a mapping* A *to which these values belong.*

First choose r independent sets of d_α independent vectors $\lambda_\sigma^{(t)}$, $\sigma = 1, \ldots$ ν_t^α, $t = 1, \ldots m_\alpha$. Since $\Sigma\, d_\alpha = n$, these vectors constitute a basis of the E_n. In each set then define the mapping A by equations (7).

§ 4. The E_n over a general field K and its mappings.

We now drop the restriction on K to be algebraically closed. Then as before we shall make use of the fact that any polynomial has a unique decomposition in prime factors but now of degrees $\geqq 1$. While theorem 1 becomes meaningless, theorems 2, 3, and 4 remain unaltered. Theorem 5 is changed into: Let P_α, $\alpha = 1, \ldots r$, be the prime-indexpolynomials of A (as factors of P^* there is only finite number of them) and let m_α be the greatest integer such that $(P_\alpha)^{m_\alpha}$ is an indexpolynomial of A, then

$$P^* = \prod_{\alpha=1}^{r} (P_\alpha)^{m_\alpha}. \tag{1}$$

Theorem 6 is also correct if only $P_m = (A - \varrho_1 I) \ldots (A - \varrho_m I)$ is replaced by the decomposition of P_m in prime-polynomials. The vector spaces $N\,(A - \varrho_\alpha I)^{m_\alpha}$ of section 2 are replaced by spaces $N\,(P_\alpha)^{m_\alpha}$ corresponding to the factors of P^* in (1). These spaces are independent and span the E_n. Theorem 9 is unchanged.

The only significant alteration occurs in the construction of a basis of $N\,(P_\alpha)^{m_\alpha}$ which is more complex than the corresponding construction of section 3:

Let P be a prime-indexpolynomial of A of degree k and m such that also $(P)^m$ is an indexpolynomial of A. We denote

$$P = A^k - \sigma_1 A^{k-1} - \ldots - \sigma_{k-1} A - \sigma_k I = \varphi_k(A), \tag{2}$$

with $\varphi_k(x)$ a prime-polynomial. As in section 3

$$N P \subset N(P)^2 \subset \ldots \subset N(P)^m, \tag{3}$$

are *proper* inclusions. The dimension of $N(P)^t$ we denote by $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_t)$, such that ν_t is the dimension of $N(P)^t$ modulo $N(P)^{t-1}$, $t = 1, \ldots m$, $\nu_t > 0$.

In the construction of a basis of $N(P)^t$ modulo $N(P)^{t-1}$ we proceed now as follows:

Since $\nu_t > 0$, there is a vector $\lambda_1^{(t)} \neq 0$ in $N(P)^t$ mod $N(P)^{t-1}$, i. e. $P^t \lambda_1^{(t)} = 0$, $P^{t-1} \lambda_1^{(t)} \neq 0$.

Hence is P^t the indexpolynomial of $\lambda_1^{(t)}$. The k vectors of $N(P)^t$,

$$\lambda_1^{(t)}, A \lambda_1^{(t)}, \ldots A^{R-1} \lambda_1^{(t)}, \tag{4}$$

then are independent modulo $N(P)^{t-1}$. Otherwise for an A-polynomial Q *of degree less than* k we would have $P^{t-1} Q \lambda_1^{(t)} = 0$. But such a relation is not possible since $P^{t-1} Q$ has not the indexpolynomial P^t of $\lambda_1^{(t)}$ as a factor, Q being of lesser degree than P.

Either (4) is a basis of $N(P)^t$ mod $N(P)^{t-1}$ or in $N(P)^t$ there exists a vector $\lambda_2^{(t)} \neq 0$ mod $(N(P)^{t-1} + V_1)$, where V_1 denotes the space spanned by the vectors (4). *(Since* (2), $A^k \lambda_1^{(t)} = P \lambda_1^{(t)}$ mod V_1, *and since* $P \lambda_1^{(t)} \varepsilon N(P)^{t-1}$, *the space* $(N(P)^{t-1} + V_1)$ *is* A*-invariant.)* In the latter case the k vectors of $N(P)^t$

$$\lambda_2^{(t)}, A \lambda_2^{(t)}, \ldots A^{k-1} \lambda_2^{(t)}, \tag{5}$$

are independent modulo $(N(P)^{t-1} + V_1)$. Otherwise for an A-polynomial Q *of degree less than* k *we would have*

$$Q \lambda_2^{(t)} = 0 \text{ modulo } (N(P)^{t-1} + V_1). \tag{6}$$

Since $(N(P)^{t-1} + V_1)$ is A-invariant, the polynomial of least degree satisfying (6), say $\widehat{Q}$, will be a factor of any polynomial Q of that property, hence of P, since $P \lambda_2^{(t)} \varepsilon N(P)^{t-1}$. But P is prime and $\widetilde{Q}$ would be P or I. $\widetilde{Q} \neq P$, since $\widetilde{Q}$ is a factor of Q in (6) of degree less than k, but also $\widetilde{Q} \neq I$, since otherwise (6), $\lambda_2^{(t)} = 0$ mod $(N(P)^{t-1} + V_1)$ against assumption. Thus is relation (6) impossible.

Either the 2 k vectors (4) and (5) form a basis of $N(P)^t$ modulo $N(P)^{t-1}$ or in $N(P)^t$ there exists a vector $\lambda_3^{(t)} \neq 0$ mod $(N(P)^{t-1} + V_{12})$,

where V_{12} denotes the A-invariant space spanned by the vectors (4) and (5). Then the k vectors of $N\,(P)^t$

$$\lambda_3^{(t)},\ A\,\lambda_3^{(t)},\quad A^{k-1}\,\lambda_3^{(t)}, \tag{7}$$

are independent modulo $(N\,(P)^{t-1} + V_{12})$. Thus after a finite number μ_t of such steps we obtain a basis of the $N\,(P)^t$ modulo $N\,(P)^{t-1}$ of $\nu_t = k\,\mu_t$ vectors,

$$\lambda_1^{(t)},\ A\,\lambda_1^{(t)},\ldots A^{k-1}\,\lambda_1^{(t)},\ \ldots\ \lambda_{\mu t}^{(t)},\ A\,\lambda_{\mu t}^{(t)},\ \ldots\ A^{k-1}\,\lambda_{\mu t}^{(t)}. \tag{8}$$

As in section 3 we prove that the P-maps of these vectors,

$$P\,\lambda_1^{(t)},\ A\,P\,\lambda_1^{(t)},\ \ldots\ A^{k-1}\,P\,\lambda_1^{(t)},\ \ldots\ P\,\lambda_{\mu t}^{(t)},\ A\,P\,\lambda_{\mu t}^{(t)},\ \ldots\ A^{k-1}\,P\,\lambda_{\mu t}^{(t)}, \tag{9}$$

are a part basis of $N\,(P)^{t-1}$ modulo $N\,(P)^{t-2}$. Making such a choise of basis we obtain relations

$$P\,\lambda_\sigma^{(t)} = \lambda_\sigma^{(t-1)},\ \sigma = 1,\ \ldots\ \mu_t \tag{10}$$

Let us denote $(A^0 = I)$,

$$A^{l-1}\,\lambda_\sigma^{(t)} = \lambda_{\sigma,\,l}^{(t)},\ \sigma = 1,\ \ldots\ \mu_t,\ l = 1,\ \ldots\ k, \tag{11.1}$$

or

$$\lambda_\sigma^{(t)} = \lambda_{\sigma,\,1}^{(t)},\ A\,\lambda_{\sigma,\,1}^{(t)} = \lambda_{\sigma,\,2}^{(t)},\ \ldots\ A\,\lambda_{\sigma,\,k-1}^{(t)} = \lambda_{\sigma,\,k}^{(t)}; \tag{11.2}$$

we derive from (2)

$$A\,\lambda_{\sigma,\,k}^{(t)} = A^k\,\lambda_\sigma^{(t)} = P\,\lambda_\sigma^{(t)} + \sigma_1\,A^{k-1}\,\lambda_\sigma^{(t)} + \ldots + \sigma_{k-1}\,A\,\lambda_\sigma^{(t)} + \sigma_k\,\lambda_\sigma^{(t)}, \tag{12.1}$$

or (10) and (11.1),

$$A\,\lambda_{\sigma,\,k}^{(t)} = \lambda_{\sigma,\,1}^{(t-1)} + \sigma_k\,\lambda_{\sigma,1}^{(t)} + \sigma_{k-1}\,\lambda_{\sigma,\,2}^{(t)} + \ldots + \sigma_1\,\lambda_{\sigma,\,k}^{(t)}. \tag{12.2}$$

Relations (11.2), (12.2) fully determine the mapping A in $N\,(P)^m$ in terms of the integers $\nu_1.\ \nu_2,\ \ldots\ \nu_m$ (with $\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_m > 0$ and all multiple of k) and of the coefficients $\sigma_1,\ \ldots\ \sigma_k$ of the prime-indexpolynomial P. We have thus established the

main-theorem: *The prime-idexpolynomials P_α, $\alpha = 1,\ \ldots\ r$, of a mapping A together with the dimensions ν_t^α of $N\,(P_\alpha)^t$ modulo $N\,(P_\alpha)^{t-1}$, $t = 1,\ \ldots\ m_\alpha$, $\alpha = 1,\ \ldots\ r$, determine A up to equivalence.*

Zur Fourierentwicklung des Produktes zweier Funktionen.

Von

Leopold Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 1. Juni 1948.)

Wir wollen einen Beitrag zu folgender Fragestellung geben: $f(x)$ sei eine in $(0,2\pi)$ periodische L-integrierbare Funktion (die gegebenenfalls noch weiteren Bedingungen unterworfen wird) und besitze an einer Stelle x_0 eine konvergente Fourierreihe (F.R.). Welchen Bedingungen muß eine periodische, L-integrierbare Funktion $g(x)$ genügen, damit die F.R. von $f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle x_0 ebenfalls konvergiert. Fragestellung und eine erste Antwort stammen von *Lebesgue*[1]. Einfache und sehr weittragende Sätze in dieser Richtung gaben *Steinhaus*[2] und *Young*[3]. Sie sind Corollare des folgenden *Satzes* 1:[4] $f(x)$, $g(x)$, $f\,\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ seien L-integrierbar. Falls $g(x_0) \neq 0$ sind die F.R. von f und $f \cdot g$ gleichzeitig konvergent oder divergent, falls $g(x_0) = 0$ ist die F.R. von $f.g.$ (an der Stelle x_0) immer konvergent. Die Konvergenz erfolgt in jedem Falle gegen $f(x_0)\, g(x_0)$.

Beweis:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\, g(x_0+t)\, \frac{\sin nt}{t}\, dt - g(x_0) \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\, \frac{\sin nt}{t}\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\, \frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t} \sin nt \longrightarrow 0.$$

Corollar 1: (*Steinhaus*): Satz 1 gilt, wenn f beschränkt ist und g an der Stelle x_0 der Bedingung von Dini genügt.[5]

---

[1] Leçons sur les sèries trigonomètriques, Paris 1906, p. 124—125.

[2] *Steinhaus*, Bulletin Intern. de l'Acad. de Cracovie, 1913, p. 113—116.

[3] *W. H. Young*, London math. Soc. Proc. (2) 18 (1920), p. 144.

[4] Vgl. *Tonelli*, Serie Trigonometriche, Bologna, 1928, p. 337.

[5] Ebenso genügt es f aus L^p und die Differenzenquotienten von g an der Stelle x_0 aus $L^{p'}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ anzunehmen.

Corollar 2: (*Young*): Satz 1 gilt, wenn f integrierbar ist und g an der Stelle x_0 durchweg beschränkte Differenzenquotienten besitzt.

Soll Corollar 1 für die Gesamtheit der beschränkten (ja sogar nur der analytischen) Funktionen f gelten, dann läßt sich die Bedingung von Dini offenbar nicht durch eine Schwächere ersetzen. Es gibt ja stets Funktionen $\bar{g}$, welche einer Bedingung $|\bar{g}(x_0+t)-\bar{g}(x_0)| \leqq \psi(t)$ mit $\int_0^t \frac{|\psi(t)|}{t}\,dt = \infty$ genügen und deren F.R. an der Stelle x_0 divergiert. Wählt man nun $\bar{f} \equiv c$, dann gilt ersichtlich für $\bar{f}$ und $\bar{g}$ die Aussage des Satzes 1 nicht mehr.

Wir behandeln nun das Problem, welche Bedingungen $f(x)$ auferlegt werden müssen, um ein Analogon zu Satz 1 zu erhalten, wenn g Konvergenzbedingungen vom Nicht-Dinischen Typus genügt. Neben der Bedingung von Dini bietet sich als einfachste Konvergenzbedingung wohl die von *Jordan* dar. Wir setzen also g von beschränkter Schwankung voraus.

Eine Klasse von Funktionen $g(x)$ soll nun als (eigentlich) konvergenzerhaltend in Bezug auf eine Klasse f bezeichnet werden, wenn aus der Konvergenz der F.R. von f an einer Stelle x_0 immer die Konvergenz von $f \cdot g$ an derselben Stelle (gegen $f(x_0) \cdot g(x_0)$ folgt. Z. B. lautete dann der auf Konvergenz bezügliche Teil des Corollar 1:

Corollar 1': Die Klasse der Funktionen g, die gleichmäßig einer Bedingung von *Dini* genügen, sind in Bezug auf die Klasse der beschränkten Funktionen eigentlich konvergenzerhaltend.)

Es ist klar, daß die Klasse der Funktionen beschränkter Schwankung g in Bezug auf dieselbe Klasse f konvergenzerhaltend ist, aber bekanntlich nicht eigentlich. (Beispiel: $f = g = \frac{\pi - x}{2}$, $x_0 = 0$).

Zieht man nun andere Funktionen f heran, bietet sich zunächst folgender Satz dar:

Satz 2: Die Klasse der Funktionen von beschränkter Schwankung g ist in Bezug auf die Klasse der L-integrierbaren Funktionen f nicht konvergenzerhaltend. Die F.R. von $f \cdot g$ kann sogar eigentlich divergieren.

Beweis:
Sei

$$f = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & 0 < t < \pi \\ \dfrac{1}{-\sqrt{|t|}} & -\pi < t < 0 \end{cases} \qquad g = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ 0 & t = 0 \\ -1 & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

f ist in $(-\pi, \pi)$ L-integrierbar und die F.R. für $t = 0$ konvergent, g im ganzen Intervall von beschränkter Schwankung.

$$f \cdot g = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & 0 < t < \pi \\ \dfrac{1}{-\sqrt{|t|}} & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

Für die *nte* Partialsumme s_n der F.R. von $f \cdot g$ an der Stelle 0 hat man:

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sin nt}{\sin \frac{1}{2} t} \, dt + o(1).$$

Es sei nun $a_n = \Omega(b_n)$, wenn $\left| \dfrac{a_n}{b_n} \right| \geqq K > 0$ für $n \longrightarrow \infty$.

Mit dieser Bezeichnung wird weiter

$$s_n = \Omega \left(\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{t + \frac{k\pi}{n}}} \frac{\sin nt}{\sin \frac{nt + k\pi}{2n}} \, dt \right) =$$

$$= \Omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{t + k\pi}} \frac{\sin t}{\sin \frac{t + k\pi}{2n}} \, dt \right) =$$

$$= \Omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin \frac{t+\pi}{2n}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} \right) dt \right) =$$

$$= \Omega \left(\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t + \pi} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} \right) dt \right) = \Omega(\sqrt{n}).$$

Das diesem Beispiel zu Grunde liegende Prinzip führt sofort zum *Satz 3*: Die Klasse der Funktionen von beschränkter Schwankung g ist in Bezug auf die Klasse der stetigen Funktionen f nicht konvergenzerhaltend.

Beweis:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{n^2}, \quad g = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \quad -\pi \leqq x \leqq \pi.$$

Die F.R. von $f \cdot g$. divergiert nach einem klassischen Satz von *Fejer* im 0-Punkt.

Es ist nun nicht ohne Interesse, daß man nach dem *Fejer*schen Vorbild zu einem weitergehenden Satz gelangen kann, der zeigt, daß das in Satz 2 und 3 auftretende Phänomen nicht von der Unstetigkeit von g im 0-Punkt abhängt.

Satz 4: Die Klasse der totalstetigen Funktionen g ist in Bezug auf die Klasse der stetigen Funktionen f nicht konvergenzerhaltend.

Beweis:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^{3^n} x}{n^2}, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k x}{k \log k} \quad (\log 1 = 1) \quad -\pi \leqq x \leqq \pi$$

Die Stetigkeit von f und die (absolute) Konvergenz der F. R. sogar überall in $-\pi \leqq x \leqq \pi$ ist klar. Da $\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\log k}$ wegen der Konvexität der Folge $\frac{1}{\log k}$ F.R. ist, versteht sich die Totalstetigkeit von g von selbst. f und g sind beschränkt, also erhält man die F.R. von $f \cdot g$ in $-\pi \leqq x \leqq \pi$ durch formale *Laurent*sche Produktbildung.[6] Ist also in komplexer Schreibweise $f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ und $g \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ikx}$ $(c_{-k} = \bar{c}_k,\ d_{-k} = \bar{d}_k)$ dann ergibt sich für die $f \cdot g$ zugeordnete F.R. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (c_k\, d_{n-k})\, e^{inx}$ und $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, d_{n-k}$ konvergiert für alle n absolut. Die reell geschriebene F.R. von $f \cdot g$ kann nur Cosinusglieder enthalten. Wir betrachten die zugehörige 3^{3^n} *te* Partialsumme an der Stelle 0. Beachtet man, daß wegen sinx. siny $= \frac{\cos.\,(x-y) - \cos.\,(x+y)}{2}$ in den Partialsummen der F.R. von $f \cdot g$. an der Stelle 0 nur dann negative Glieder auftreten, wenn sie die Koeffizienten eines Cosinusgliedes darstellen, dessen Argument sich aus der Summe der Argumente zweier Sinusglieder der Reihen von f, bzw. g bilden läßt und untersucht man alle Möglichkeiten für die in der 3^{3^n} ten Partialsumme auftretenden Glieder, dann sieht man, daß jene an der Stelle 0 größer ist, als

[6] Vgl. *Zygmund*, Trigonometrical Series, Warschau, 1935, p. 90.

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1\log 1}+\frac{1}{2\log 2}+\ldots+\frac{1}{(3^{3^{n^3}}-1)\log(3^{3^{n^3}}-1)}\right)\sim\frac{1}{n^2}\log\log 3^{3^{n^3}}=$$

$$=n\log 3+\frac{\log\log 3}{n^2}\quad \text{w. z. b. w.}$$

Man beachte, daß offenbar $\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k|$ konvergiert und $d_k = o\,(\frac{1}{k})$. Somit ergibt sich aus Satz 4 das mir neu erscheinende

Corollar 3: Das *Laurent*sche Produkt einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k$ und einer konvergenten Reihe $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k$ mit $d_k = o\,(\frac{1}{k})$ braucht nicht zu konvergieren, während der entsprechende Satz für die *Cauchy*sche Produktbildung bekanntlich ohne Zusatzvoraussetzung über die d_k gilt.

In diesem Zusammenhange ist noch ein interessantes Ergebnis erwähnenswert, daß sich bei *Zygmund*[7] ohne Beweis findet:

Satz 5: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{ikx}$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k\, e^{ikx}$ $(a_{-k}=\bar{a}_k)$, $(b_{-k}=\bar{b}_k)$ seien zwei trigonometrische Reihen mit $a_k = o\,(\frac{1}{k})$, $b_k = O\,(\frac{1}{k})$ (also F. R.), welche an einer Stelle x_0 gegen A, bzw. B konvergieren mögen. Dann konvergiert das *Laurent*sche Produkt der beiden Reihen gegen $A\,.\,B$.

Wir wollen der Vollständigkeit halber den elementaren Beweis darstellen: Wir zeigen:

$$\left|\sum_{n=-p}^{+p}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, b_{n-k}\, e^{inx_0} - B\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{ikx_0}\right| < \varepsilon \text{ für } p \geqq p_\varepsilon$$

$0.B.d.A.$ sei $|a_k| = \varepsilon\,(k)\,\frac{1}{k}$ mit $\varepsilon\,(k) = o\,(1)$ und $|b_k| = \frac{1}{k}$.

Sei

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{ikx_0}\,(\sum_{n=-p}^{p} b_{n-k}\, e^{i(n-k)x_0} - B) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widetilde{a}_k \sum_{n=-p}^{+p}\widetilde{b}_{n-k},\ \widetilde{a}_k = a_k\, e^{ikx_0},$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\widetilde{b}_k = b_k\, e^{ikx_0}$, $\widetilde{b}_0 = b_0 - B$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Nach Voraussetzung läßt sich $\sum_{n=-p}^{+p}\widetilde{b}_n$ durch Wahl von p beliebig klein machen, z. B.

$$\left|\sum_{n=-p}^{+p}\widetilde{b}_n\right| < \frac{\varepsilon}{16\,A}$$

---

[7] L. c. 5), p. 304.

Nun wählen wir $m > 0$ so, daß $\left| \sum_{k=-m}^{m} \widetilde{a}_h \right| \leqq 2A$ und $|\varepsilon(m)| \leqq \frac{\varepsilon}{16 \log 8}$.

Dann wird:

$$\left| \sum_{k=-m}^{m} \widehat{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \widetilde{b}_{n-k} \right| \leqq \left| \sum_{k=-m}^{m} \widetilde{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \widetilde{b}_n \right| + \left| \sum_{1}^{m} \widehat{a}_k \sum_{l=-k}^{-1} (\widetilde{b}_{-p+l} - \widetilde{b}_{p+l+1}) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{-m}^{-1} \widetilde{a}_k \sum_{l=1}^{k} (\widetilde{b}_{p+l} - \widetilde{b}_{-p+l-1}) \right| \leqq 2A \left| \sum_{n=-p}^{+p} \widehat{b}_n \right| + \frac{4m}{p-m+1}, \quad \text{also}$$

durch Wahl von p, $\leqq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{[\frac{p}{2}]} \widetilde{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \widehat{b}_{n-k} + \sum_{-[\frac{p}{2}]}^{-(m+1)} \widetilde{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \widetilde{b}_{n-k} \right| \leqq \left| \sum_{m+1}^{[\frac{p}{2}]} \widehat{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \widetilde{b}_n + \sum_{-[\frac{p}{2}]}^{-(m+1)} \widetilde{a}_k \sum_{n=-p}^{p} \widetilde{b}_n \right| +$$

$$+ \left| \sum_{m+1}^{[\frac{p}{2}]} \widehat{a}_k \sum_{l=-k}^{-1} (\widetilde{b}_{-p+l} - \widehat{b}_{p+l+1}) \right| + \left| \sum_{-[\frac{p}{2}]}^{-m+1} \widetilde{a}_k \left(\sum_{l=1}^{k} (\widetilde{b}_{p+l} - \widehat{b}_{-p+l-1}) \right) \right| \leqq$$

$$\leqq 2A \left| \sum_{n=-p}^{p} \widetilde{b}_n \right| + 2 |\varepsilon(m)| \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-m} \frac{1}{m+k} \left(\frac{1}{p-m-k+1} + \ldots + \frac{1}{p+m+k} \right)$$

Es ist

$$\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-m} \frac{1}{m+k} \left(\frac{1}{p-m-k+1} + \ldots + \frac{1}{p+m+k} \right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-m} \frac{1}{m+k} \log \frac{p+m+k}{p-m-k} \leqq p \cdot \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-m} \frac{1}{p^2 - (m+k)^2}$$

dieses wegen $\log \frac{1+x}{1-x} \leqq \frac{2x}{1-x^2}$.

Es ist aber $p \sum_{k=m+1}^{[\frac{p}{2}]} \frac{1}{p^2 - k^2} \leqq p \cdot \frac{1}{p} \left(\log \frac{3\frac{p}{2} + 1}{\frac{p}{2} - 1} - \log \frac{p+m+1}{p-m-1} \right) \leqq$

$\leqq \log 8$.

Durch Wahl von p erreicht man also

$$\left| \sum_{k=m+1}^{[\frac{p}{2}]} \widehat{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \widetilde{b}_{n-k} + \sum_{-[\frac{p}{2}]}^{-m+1} \widetilde{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \widehat{b}_{n-k} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Schließlich:

$$\left| \sum_{\left[\frac{p}{2}\right]+1}^{\infty} \tilde{a}_k \sum_{n=-p}^{+p} \tilde{b}_{n-k} + \sum_{-\infty}^{-\left[\frac{p}{2}\right]-1} \tilde{a}_k \sum_{n=-p}^{p} \tilde{b}_{n-k} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=-p}^{+p} \left(\sqrt{\sum_{\left[\frac{p}{2}\right]+1}^{\infty} \tilde{a}_k^2 \sum_{k=\left[\frac{p}{2}\right]+1}^{\infty} \tilde{b}_{n-k}^2} + \sqrt{\sum_{-\infty}^{-\left[\frac{p}{2}\right]-1} \tilde{a}_k^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{-\left[\frac{p}{2}\right]-1} \tilde{b}_{n-k}^2} \right) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon \left(\left[\frac{p}{2}\right]+1\right) \sum_{n=-p\left[\frac{p}{2}\right]}^{p} \frac{2}{}\left(\frac{\pi^2}{3} + \tilde{b}_0^2\right) =$$

$$= \varepsilon \left(\left[\frac{p}{2}\right]+1\right) \frac{(2p+1)}{\left[\frac{p}{2}\right]} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi^2}{3} + \tilde{b}_0^2\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ wenn } p \geqq p_\varepsilon.$$

Insgesamt:

$$\left| \sum_{n=-p}^{p} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_k \cdot \tilde{b}_{n-k} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ für } p \geqq p_\varepsilon, \text{ w. z. b. w.}$$

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich hieraus sofort das *Corollar 4*: Die Klasse der totalstetigen Funktionen ist in Bezug auf die Klasse der Funktionen von beschränkter Schwankung eigentlich konvergenzerhaltend und umgekehrt.

Wir haben speziell im Satz 3 und 4 dargetan, daß trotz einschränkender Voraussetzungen, die weit über die L-integrierbarkeit von f und g hinausgehen und sogar trotz absoluter Konvergenz der F.R. von f an der betrachteten Stelle, bei Betrachtung von Konvergenzkriterien für g vom Nicht-Dinischen Typus, ein Satz 1 analoges Ergebnis nicht zu erreichen ist.

Man kann zwar dem Corollar 4 ähnliche Aussagen machen, welche über dieses sogar hinausgehen, die aber mehr oder weniger trivialen Charakter tragen: Wir erwähnen z. B. den

Satz 6: Die Klasse der stetigen Funktionen g von beschränkter Schwankung, ist in Bezug auf die Klasse der Funktionen f, welche einer Konvergenzbedingung von *de la Vallee Poussin* genügen, eigentlich konvergenzerhaltend.

Beweis:

$\frac{1}{t} \int_0^t f(x_0 + t)\, dt = \psi(t)$ sei von beschränkter Schwankung und $\lim_{t \to 0} \psi(t) = f(x_0)$.

Es ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\, g(x_0+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\psi'(t)\, g(x_0+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\, g(x_0+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt \to 0 + f(x_0)\, g(x_0),$$

wegen der L-integrierbarkeit von $\psi'(t)$ ($\psi'(t)$ = dem Differentialquotienten von $\psi(t)$ wo er existiert und sonst gleich 0) und Corollar 1.

Ein ganz analoges Ergebnis kann man für die Klasse der Funktionen f erzielen, welche der bekannten Konvergenzbedingung von *Young* genügen, doch gehen wir auf diese und ähnliche Sätze nicht mehr ein.

Wir wollen noch zeigen, daß eine geringfügige Modifizierung der Produktbildung dazu führt, daß man unter sehr weiten Voraussetzungen, wenigstens im Falle der absoluten Konvergenz der F.R. einer Funktion an der betrachteten Stelle, die eigentliche Konvergenz (im o. a. Sinne) behaupten kann. Dies wird durch die eigentliche Formulierung der Voraussetzungen in Satz 1 und 6 sowie Satz 2, 3, 4 unmittelbar nahegelegt. Hiezu betrachten wir anstatt der F. R. von $f(x_0+t)$ an der Stelle $t=0$, die von $\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}$ an der Stelle $t=0$ und beweisen den *Satz 7*: f und g mögen L^p bzw. $L^{p'}$ $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1\right)$ angehören, ihre F.R. mögen an der Stelle x_0 gegen $f(x_0)$, bzw. $g(x_0)$ konvergieren, jedoch mindestens eine sogar absolut. Dann gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0\,t)}{2}\, g(x_0+t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \to g(x_0)\, f(x_0).$$

Unter gleichen Konvergenzvoraussetzungen gilt dies auch noch, wenn eine Funktion beschränkt und die andere L-integrierbar ist oder auch wenn die eine Funktion von beschränkter Schwankung ist und die andere ein *Harnack-Lebesgue*sches Integral besitzt[8].

Beweis:

Sei $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_k \cos kx + b_k \sin kx$, also $\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} \sim$

$$\sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)\,.\,\cos kt = A_0 + \sum_1^\infty A_k \cos kt$$

[8] Wegen dieser letzten Voraussetzung vgl. *W. H. Young*, London, math Soc. Proc. (2) 9 (1911), p. 449—462.

und $\sum_0^\infty |A_k| < \infty$ $\left(A_0 = \frac{a_0}{2},\ A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$.

Es ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\, g(x_0+t)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt -$$

$$-g(x_0)\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\,(g(x_0+t)+$$

$$+ g(x_0-t) - 2g(x_0))\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}((g(x_0+t)+g(x_0-t)-2g(x_0)\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2}+k)t}{2\sin\frac{1}{2}t}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(n+\frac{1}{2}-k)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right) dt = \frac{1}{2}\sum_0^\infty A_k (S_{n+k}+S_{n-k}).$$ Hiebei ist S_n die nte Partialsumme der F.R. $(S_{-n} = -S_n)$ von $g(x) - g(x_0)$ an der Stelle x_0, also $S_n = o(1)$. Die Vertauschung von Integral und Summation ist den Voraussetzungen gemäß zulässig. Die Konvergenz der hier stehenden Reihe ist für jedes feste n zunächst im Sinne der Ck-Summierbarkeit $(k > 0)$ gesichert, wegen $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| < \infty$ besteht sie aber im üblichen Sinne.

Wir zeigen nun: $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (S_{n+k}+S_{n-k}) = o(1)$ für $n \to \infty$.

Sei $|S_k| \leqq K$, $|A_k| \leqq A$ für alle k. Wir wählen nun m so, daß $\sum_{m+1}^{\infty} |A_k| < \frac{\varepsilon}{4K}$ und hierauf bei festgehaltenem m n so groß, daß $|S^l| \leqq \frac{\varepsilon}{4A(m+1)}$ $l \geqq n-m$.

Dann hat man aber

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} A_k (S_{n+k}+S_{n-k})\right| < \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K + \frac{2\varepsilon}{4A(m+1)}\,(m+1)A = \varepsilon.$$

Sieht man von der absoluten Konvergenz einer der beiden F.R. an der Stelle x_0 ab, dann erhält man z. B. den ganz ähnlich zu beweisenden *Satz 7*: f sei L-integrierbar, besitze im Punkte x_0 eine konvergente F.R.

und für deren nte Partialsumme möge gelten: $s_n - f(x_0) = 0\left(\frac{1}{\log n}\right)^{\alpha}$ ($\alpha > 1$). Ist $g(x)$ von beschränkter Schwankung, dann gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\, g(x_0+t)\, \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt \to f(x_0)\, g(x_0).$$

Ein Spiegelproblem.

Von
Walter Wunderlich, Wien.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 10. Juni 1948.)

1. Problemstellung.

Eine als spiegelnd vorausgesetzte Ellipse hat bekanntlich die Eigenschaft, das von einem Brennpunkt ausstrahlende Büschel von Lichtstrahlen nach einer ungeraden (bzw. geraden) Anzahl von Reflexionen wieder im anderen (bzw. im selben) Brennpunkt zu vereinigen. Diese Tatsache kann zum Anlaß der folgenden verallgemeinerten Aufgabenstellung genommen werden:

In der Ebene sind zwei feste Punkte A und B gegeben. Es sind analytische Spiegelkurven zu suchen, die das Büschel der aus A kommenden Lichtstrahlen nach n-maliger Reflexion nach B werfen.

Für $n=1$ wird man im wesentlichen auf Kegelschnitte mit A und B als Brennpunkten geführt, und zwar auf durchaus elementarem Wege. Für $n > 1$ sind meines Wissens außer dem eingangs angeführten trivialen Beispiel keine Lösungen bekannt. Es muß betont werden, daß nur analytische — also einheitliche — Spiegelkurven interessieren; andernfalls ließen sich leicht Kurven mit der verlangten Eigenschaft aus mehreren Stücken zusammensetzen: Man könnte z. B. die Bögen für die ersten n—1 Reflexionen innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählen und das Kurvenstück für die letzte Spiegelung dann so konstruieren, daß die Vereinigung des Strahlensystems in B herbeigeführt wird.

Schon für den Fall $n = 2$ sind die Schwierigkeiten der gestellten Aufgabe anscheinend nicht gering. Im vorliegenden Aufsatz werden zwei Teillösungen dieses speziellen Problems gegeben, die sich mit elementaren Mitteln erledigen lassen, nämlich für die Annahme zusammenfallender Zentren $A = B$, ferner für unendlichferne Zentren.

Die Erweiterung der Fragestellung auf den R a u m liegt auf der Hand, doch soll hierauf nicht eingegangen werden. Es sei nur auf eine nichttriviale Lösung des Falles $n = 3$ für die besondere Annahme zusammenfallender Fernzentren hingewiesen, die den eigentlichen Anstoß zu der vorliegenden Untersuchung gab: Ein parallel zur Achse eines elliptischen Paraboloides ins Innere einfallendes Strahlbündel tritt nach dreimaliger Reflexion wieder parallel zur Achse aus[1].

2. Spiegelkurven, die ein eigentliches Strahlbüschel nach zweimaliger Reflexion in den Ausgangspunkt zurückwerfen.

Sei $n = 2$ und $A = B$ ein endlicher Punkt. Ein von A ausgehender Lichtstrahl treffe die Spiegelkurve k zum erstenmal im Punkt S, nach Reflexion an der Tangente s daselbst zum zweitenmal in T, und gelange nach neuerlicher Spiegelung an der zugehörigen Tangente t nach A zurück (Abb. 1). Der Strahl ST ist eine Normale jenes Zweiges der

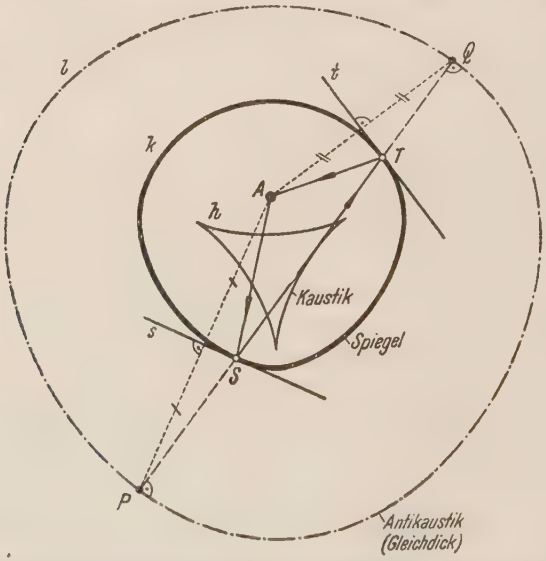

Abb. 1. Spiegelkurve mit der Eigenschaft, das Strahlbüschel A nach zweimaliger Reflexion wieder in A zu sammeln.

Antikaustik l, der den zu A bezüglich s spiegelbildlichen Punkt P enthält, ebenso aber auch eine Normale jenes Zweiges, auf welchem

[1] *W. Wunderlich*, Spiegelung am elliptischen Paraboloid. Mh. Math. **52** (1948), 13—37.

das Spiegelbild Q von A bezüglich t liegt[2]. Da s und t Tangenten ein und derselben Spiegelkurve k sein sollen, hat deren Gegenpunktskurve l die Eigenschaft, jede Normale als Doppelnormale zu besitzen. Sie ist dann eine Kurve konstanter Breite (ein „Gleichdick") und die Spiegelkurve kann als ihre negative Gegenpunktskurve für das Zentrum A erhalten werden, d. h. sie wird von der Symmetrale s der Strecke AP eingehüllt, wenn P die Kurve l durchläuft.

Eine Spiegelkurve, die ein eigentliches Strahlbüschel nach zweimaliger Reflexion in den Ausgangspunkt zurückwirft, ist negative Gegenpunktskurve (oder negative Fußpunktskurve) einer Kurve konstanter Breite.

Damit ist dieser Sonderfall grundsätzlich erledigt, denn die Herstellung von Kurven konstanter Breite — etwa durch Annahme ihrer Evolute, d. h. der Kaustik — ist hinlänglich bekannt[3]. Die konstante Breite PQ gibt übrigens die Länge des konstanten Lichtweges $ASTA$ an.

Die einfachste Annahme für eine Kurve konstanter Breite ist natürlich der Kreis. Da das Zentrum A im Innern liegen muß, ergibt sich dann als Spiegelkurve zwangläufig eine Ellipse mit dem Brennpunkt A, also das Ausgangsbeispiel.

Die bekanntesten nichttrivialen analytischen Gleichdicke sind vielleicht die Evolventen der Steinerzykloide (der dreispitzigen Hypozykloide[4]). Auf Grundlage dieser Annahme gelangt man i. a. zu Spiegelkurven 14. Ordnung und 12. Klasse, die 6 Spitzen auf der Zykloide besitzen, nämlich in den Mittelpunkten jener Krümmungskreise der Evolvente, die durch das Zentrum A gehen. Wählt man den Durchmesser des Gleichdicks hinreichend groß, so wird es sich wenig vom Kreis unterscheiden und man kann erreichen, daß A im Innern sämtlicher Krümmungskreise liegt; dann fällt der reelle Zug der Spiegelkurve singularitätenfrei aus (Abb. 1).

---

[2] Wird ein Strahlbüschel A an einer Kurve k reflektiert, so entsteht eine Strahlenschar, deren Hüllkurve h als Kaustik, und deren Orthogonaltrajektorien als Antikaustiken bezeichnet werden. Unter den letzteren befindet sich die Gegenpunktskurve l von k bezüglich A, d. h. der Ort der Spiegelbilder von A bezüglich der Tangenten von k; l kann als Rollkurve erhalten werden, wenn nämlich auf der Grundkurve k eine kongruente Kurve k' rollt und einen Punkt A' mitnimmt, derart, daß k und k' sowie A und A' stets spiegelbildlich zur Wälztangente liegen. Die Kaustik h ist die Evolute von l.

[3] Vgl. z. B. *F. Schilling*, Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite. Z. Math. Phys. **63** (1915), 67—136.

Vom algebraischen Standpunkt aus etwas einfachere Verhältnisse würden an sich bei Annahme der Kardioide (der einspitzigen Epizykloide[4]) als Kaustik auftreten, doch sind die daraus abgeleiteten Spiegelkurven (i. a. 10. Ordnung und 8. Klasse) niemals ohne reelle Singularitäten.

3. Spiegelkurven, die ein Parallelenbüschel nach zweimaliger Reflexion wieder als Parallelenbüschel zurückwerfen.

Seien A und B Fernpunkte und $n = 2$. Ein aus A kommender Lichtstrahl werde durch zweimalige Reflexion an der Spiegelkurve k in den Punkten S und T um den Winkel 2ω in die Richtung B umgelenkt (Abb. 2). Bezeichnen σ und τ die Einfallswinkel gegen die Tangenten s in S und t in T, so erscheint die konstante Gesamtablenkung 2ω aus den veränderlichen Bestandteilen 2σ und 2τ zusammengesetzt, und man erkennt:

Zusammengehörige Spiegeltangenten schließen einen unveränderlichen Winkel $\sphericalangle st = \sigma + \tau = \omega$ *ein.*

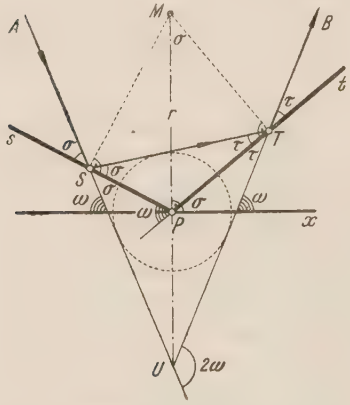

Abb. 2. Zusammenhang der Parallelenbüschel A und B, vermittelt durch zweimalige Reflexion.

Die Spiegelkurve k läßt sich also als *Hüllkurve eines starren Winkels* $st = \omega$ erzeugen. Um eine Aussage über die Bahn des Winkelscheitels P zu gewinnen, suchen wir das Momentanzentrum M auf, das sich im Schnitt der Spiegelnormalen von S und T ergibt[5]; die Bahntangente von P ist dann normal zu MP. Nun ist aber, wie aus Abb. 2 ersichtlich, P der Inkreismittelpunkt des Lichtstrahldreiecks STU — wobei U den Schnitt von einfallendem und austretendem Lichtstrahl bezeichnet — mithin M ein Ankreismittelpunkt; MP deckt sich also mit der Halbierenden des Winkels TUS, hat demnach konstante Richtung,

[4] *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven (Sammlg. Schubert **56**). *G. Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (deutsch von *F. Schütte*).

[5] Die Elemente der Kinematik lehren, daß sich der Bewegungszustand eines starren ebenen Systems in jedem Augenblick als Drehung um einen bestimmten Punkt M, das „Momentanzentrum" auffassen läßt. Die Bahnnormalen aller Systempunkte gehen in diesem Augenblick durch M, ebenso auch die Berührungsnormalen aller Gleitkurvenpaare.

und Gleiches gilt für die dazu senkrechte Bewegungsrichtung von P. Hieraus folgt aber unmittelbar:

Die Bahn des Winkelscheitels P ist eine Gerade, die den Winkel 2ω zwischen Einfallsrichtung A und Austrittsrichtung B halbiert.

Machen wir jetzt die Bahngerade des Scheitels P zur x-Achse eines Normalkoordinatensystems, so läßt sich die Bewegung des Winkels st durch Angabe der Abhängigkeit der Scheitelabszisse X vom Drehwinkel σ festlegen. Die Spiegelkurve k kann dann als Einhüllende der Tangente t

$$x \sin\sigma - y\cos\sigma = X\sin\sigma \tag{1}$$

bestimmt werden; da wir verlangen, daß auch die Tangente s dieselbe Hüllkurve liefert, muß

$$X(\sigma) = X(\sigma - \omega) \tag{2}$$

eine periodische Funktion mit der Periode ω sein.

Nach dieser Festsetzung ergibt sich dann aus der Tangentengleichung (1) und ihrer Ableitung nach σ

$$x\cos\sigma + y\sin\sigma = X\cos\sigma + X'\sin\sigma \tag{1'}$$

die Parameterdarstellung der Spiegelkurve k:

$$x = X + X'\sin\sigma\cos\sigma, \quad y = X'\sin^2\sigma. \tag{3}$$

Damit ist das vorliegende Teilproblem grundsätzlich erledigt. Einige mit der Aufgabe verknüpfte geometrische Örter, vor allem die Polkurven und die Brennlinien, sollen noch kurz angegeben werden.

Die Rastpolbahn p — d. i. der Ort der Momentanzentren M in der ruhenden Unterlage — ergibt sich mit

$$x = X,\ y = X'. \tag{4}$$

Die Gangpolbahn q — der Ort der Zentren M im bewegten System[6] — stellt sich in einem Polarkoordinatensystem r, σ, dessen Nullpunkt im Winkelscheitel P liegt, dar durch

$$r = X'; \tag{5}$$

die Nullrichtung steht dabei senkrecht auf t und die Winkelzählung erfolgt im negativen Sinn.

Die Darstellung der Kaustik, die von den reflektierten Strahlen ST eingehüllt wird, gestaltet sich in Punktkoordinaten ziemlich umständlich; wir begnügen uns daher mit der Angabe der Tangentengleichung. Der Richtungswinkel von ST beträgt

[6] Während der Bewegung rollt bekanntlich die Gangpolbahn auf der Rastpolbahn gleitungslos ab.

$$\varphi = \sigma - \tau = 2\sigma - \omega, \tag{6}$$

und damit schreibt sich die Tangentengleichung der Brennlinie

$$x \sin\varphi - y\cos\varphi = X(\sigma) \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} X'(\sigma) \cdot (\cos\omega - \cos\varphi); \tag{7}$$

σ ist natürlich gemäß (6) durch $\frac{1}{2}(\varphi + \omega)$ zu ersetzen. Integration von (7) führt unmittelbar auf die Gleichung der Antikaustiken

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = X(\sigma) \cdot (\cos\varphi - \cos\omega) + C. \tag{8}$$

Für den Ort der Punkte U, in welchen sich ein- und austretende Lichtstrahlen schneiden, findet man die Gleichungen

$$x = X(\sigma), \quad y = X'(\sigma) \cdot \frac{\cos\omega - \cos\varphi}{2\cos\omega}. \tag{9}$$

4. Eine spezielle Kurvenfamilie.

Wir spezialisieren die periodische Grundfunktion (2) mit der Periode $\omega = \pi/m$ durch die Annahme

$$X(\sigma) \equiv -\operatorname{ctg} m\sigma \quad (m\omega = \pi). \tag{10}$$

Zu der dadurch definierten Familie von Spiegelkurven gehört für $m = 2$ die gewöhnliche Parabel, die sich mit ihrer bekannten Eigenschaft, achsenparallele Lichtstrahlen nach zweimaliger Reflexion wieder parallel zurückzuwerfen, hier einordnet. Die übrigen Mitglieder weisen außer ihrer merkwürdigen Spiegeleigenschaft verschiedene bemerkenswerte Zusammenhänge mit anderen bekannten Kurven auf, wie die nähere Untersuchung zeigt.

Gemäß (3) erhalten wir im vorliegenden Fall als Gleichungen der Spiegelkurve

$$x = \frac{m\sin 2\sigma - \sin 2m\sigma}{1 - \cos 2m\sigma}, \quad y = \frac{m(1 - \cos 2\sigma)}{1 - \cos 2m\sigma}. \tag{11}$$

Dem Parameterbereich $-\omega < \sigma < \omega$ entspricht ein einsinnig gekrümmter, zur y-Achse symmetrischer Ast, der sich nach beiden Seiten parabolisch ins Unendliche erstreckt. Für $m \geqq 2$ besitzt er keinen störenden Doppelpunkt und vermag sämtliche auf der linken Hälfte aus der Richtung $\pi - \omega$ auftreffenden Lichtstrahlen noch ein zweites Mal zu reflektieren und in der Richtung ω zurückzuwerfen. Der Scheitelpunkt $\sigma = 0$ hat die Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 1/m$, der zugehörige Krümmungsradius beträgt $\varrho_0 = \frac{2}{3}(m - m^{-1})$.

Berechnen wir den Normalabstand p der Spiegeltangente t (1) vom Punkt F (0, 1), so erhalten wir den einfachen Ausdruck

$$p = X \sin\sigma + \cos\sigma = \frac{\sin(m-1)\,\sigma}{\sin m\,\sigma}. \tag{12}$$

Deuten wir nun p, bzw. $1/p$ als Polarkoordinate in einem System R, σ mit dem Ursprung F, so erkennen wir:

Die Fußpunktskurve der Spiegellinie für den Pol F ist die Araneide[7] $R = \sin(m-1)\,\sigma/\sin m\,\sigma$.

Die Polarkurve der Spiegellinie bezüglich des Einheitskreises um F ist die Araneide[7] $R = \sin m\,\sigma/\sin(m-1)\,\sigma$.

Zu rationalen Werten von m gehören rational-algebraische Spiegelkurven. Wir setzen im folgenden insbesondere $m > 1$ und ganz voraus. Führen wir durch $x=\xi_1/\xi_0$ und $y=\xi_2/\xi_0$ homogene Koordinaten ein, so schreibt sich die Spiegelgleichung (11) mit Benützung des komplexen Parameters $z = e^{2i\sigma}$ in der Gestalt

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 = (z^m-1)^2 : -i\,(z^{2m} - m\,z^{m+1} + m\,z^{m-1} - 1) : m\,z^{m-1}(z-1)^2. \tag{13}$$

Nach Kürzung durch $(z-1)^2$ erkennt man die Ordnung der Spiegelkurve mit $2\,(m-1)$, während sich aus der entsprechenden Umformung der Tangentengleichung (1) die Klasse mit m ergibt. Man liest ferner aus (13) die Tatsache ab, daß die Kurve die *Ferngerade* $(\xi_0=0)$ *in* $m-1$ *Punkten berührt* (deren Richtungen regelmäßig im Abstand ω verteilt sind, wenn man die x-Richtung hinzunimmt), und daß die Leitgerade $x\,(\xi_2 = 0)$ zwei konjugiert-imaginäre $(m-1)$-*fache Punkte* $I_{1,2}\,(\pm i, 0)$ trägt, deren Tangenten in je einem Minimalstrahl zusammenfallen; der vorhin benützte Punkt F (0, 1) ist demnach als *(einziger) Brennpunkt* anzusehen. Für $m > 2$ treten neben I_1 und I_2 als weitere Singularitäten noch $m-2$ *Spitzen* auf; man findet diese bekanntlich durch Gleichsetzen der Tangentengleichung (1) mit ihrer 2. Ableitung, was im vorliegenden Fall auf die Parameterbedingung

$$\operatorname{tg}\sigma = -\frac{2\,X'}{X''} = \frac{1}{m}\operatorname{tg} m\,\sigma \neq 0 \tag{14}$$

führt.

---

[7] Eine Araneide entsteht als Ort des Schnittpunktes zweier gleichförmig rotierender Zeigerstrahlen mit verschiedenen Drehpunkten. Diese Kurven wurden unter den verschiedensten Bezeichnungen von *Plateau*, *Schoute*, *Kempe*, *Heymann* u. v. a. als „Sektrizen" zur Winkelteilung herangezogen[4].

Der Versuch liegt nahe, das Punktepaar $I_{1,2}$ durch eine Kollineation in die absoluten Kreispunkte zu werfen, was durch Einführung der neuen Normalkoordinaten $\xi = \xi_1/\xi_2$, $\eta = (\xi_0 - \xi_2)/\xi_2$ besorgt werden kann. Da letztere für $|z| = 1$ reell sind, können wir sie zu einer komplexen Größe $\zeta = \xi + i\,\eta$ zusammenfassen; wir finden zunächst

$$\zeta = \frac{2\,i}{m} \cdot \frac{(m-1)\,z^m - m\,z^{m-1} + 1}{z^{m-1}\,(z-1)^2}, \tag{15}$$

und erhalten nach Kürzung durch $(z-1)^2$ sowie Einführung des Winkelparameters ψ mittels $z = e^{-i\psi}$ schließlich

$$\zeta = \frac{2\,i}{m}\,[(m-1)\,e^{i\psi} + (m-2)\,e^{2i\psi} + \ldots + 1\,.\,e^{(m-1)\,i\,\psi}]. \tag{16}$$

Eine Gleichung dieser Bauart definiert aber eine Radlinie $(m-1)$-ter Stufe, d. i. die Bahnkurve des Endpunktes eines $(m-1)$-gliedrigen Gelenkpolygons mit festem Anfangspunkt, dessen starre Glieder sich mit konstanten Geschwindigkeiten drehen[8]. Die vorliegende Radlinie ist insonderheit eine „zykloidale", d. h. sie kann auch als Hüllkurve einer Geraden entstehen, die mit dem letzten Glied eines derartigen Gelenkpolygons fest verbunden ist[9].

Die Spiegelkurve ist kollinear zu einer zykloidalen Radlinie $(m-1)$-ter Stufe, die durch eine $(m-1)$-fache Tangente ausgezeichnet ist und der Sippe $1:2:\ldots:(m-1)$ *angehört.*

Untersuchung der aus (7), bzw. (8) fließenden Gleichungen der Brennlinien zeigt, daß die Kaustik eine Kurve $3(m-2)$-ter Ordnung und $2(m-1)$-ter Klasse ist, während die Antikaustiken die Ordnung $2\,(m-1)$ und die Klasse m haben.

Das Erzeugnis (9) der einfallenden und austretenden Lichtstrahlen erweist sich nach Transformation auf die Koordinaten $\xi = \xi_1/\xi_2$ und $\eta = \xi_0/\xi_2$ ebenfalls als kollinear zu einer Radlinie der Sippe $1:2:\,.:(m-1)$, allerdings keiner zykloidalen. Ordnung und Klasse sind beide gleich $2\,(m-1)$.

Für die Rastpolbahn p der Winkelbewegung findet man gemäß (4) die Parabel

---

[8] *W. Wunderlich*, Höhere Radlinien. Öst. Ing. Arch. **1** (1947), 277—296. Nach der dort eingeführten Terminologie werden alle Radlinien mit den gleichen Geschwindigkeitsverhältnissen zu einer „Sippe" zusammengefaßt. — Die Radlinien 2. Stufe sind identisch mit den Epi- und Hypotrochoiden.

[9] Die zykloidalen Radlinien nehmen unter den allgemeinen Radlinien dieselbe Sonderstellung ein, wie die Zykloiden unter den Trochoiden.

$$y = m\,(x^2 + 1), \tag{17}$$

für die zugehörige Gangpolbahn q gemäß (5) die Kurve

$$r = \frac{m}{\sin^2 m\,\sigma}, \tag{18}$$

die durch m-fache Winkelstreckung (Vervielfachung der Polarwinkel σ) in die Kampyla des *Eudoxus*[4] ($m=1$) übergeht; sie ist invers zu einer speziellen Radlinie 3. Stufe der Sippe $1:(1+2\,m):(1-2\,m)$, die wiederum als Mittelpunktskonchoide einer Rosenkurve[4] $r' = \cos 2\,m\,\sigma$ aufgefaßt werden kann.

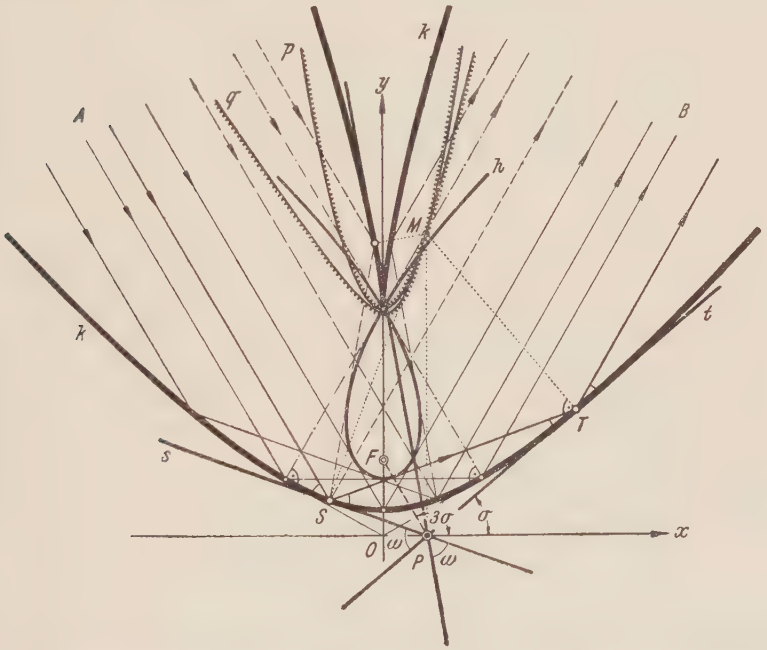

Abb. 3. Spezielle Spiegelkurve 4. Ordnung und 3. Klasse, mit der Eigenschaft, ein Parallelenbüschel um $2\omega = 120^0$ umzulenken.

Der nach $m = 2$ — dem parabolischen Spiegel — nächsteinfache Spezialfall $m = 3$ ist in Abb. 3 dargestellt. Es handelt sich um eine Spiegelkurve 4. Ordnung und 3. Klasse mit der kartesischen Gleichung

$$3\,(3\,x^2 - y^2 - 6\,y + 3)^2 = 64\,y^3. \tag{19}$$

Sie ist eine kollineare Kardioide (16) und kann als negative Fußpunktskurve der Hyperbel $R = \sin 2\,\sigma/\sin 3\,\sigma$ oder als Polarreziproke der

Trisektrix von *Maclaurin*[4] $R = \sin 3\,\sigma/\sin 2\,\sigma$ erhalten werden. — Als Kaustik (3. Ordnung und 4. Klasse) tritt eine Tschirnhausen-Kubik[4] auf, während die symmetrische unter den Antikaustiken (4. Ordnung und 3. Klasse) als Polarkurve der Strophoide[4] $2\,R = -\mathrm{tg}\,\sigma/2$ bezüglich des Einheitskreises um den Brennpunkt F (0, 1) aufgefaßt werden kann. Das Erzeugnis (4. Ordnung und 4. Klasse) ein- und austretender Lichtstrahlen ist eine kollineare Pascalschnecke[4].

Buchbesprechungen.

Einführung in die Mathematik. Von *A. N. Whitehead.* Aus dem Englischen übersetzt von *B. Schenker.* (Sammlung „Die Universität": Band 3) Mit 33 Textabb., 223 S. (Lizenzausgabe) Wien: Humboldt-Verlag. 1948.

Es ist sehr begrüßenswert, daß der Verlag dieses bekannte Buch in seine Sammlung aufgenommen hat. Dieses Werk stellt sich die Aufgabe, dem Leser das Wesen der Mathematik und ihre grundlegenden Begriffe nahe zu bringen. Im Mittelpunkt steht der Zahl- und Grenzbegriff. Hier herrschen auch oft unter den Studenten der Mathematik falsche Vorstellungen. Dabei wird die Darstellung so geführt, unter starker Benützung der historischen Entwicklung, daß der Leser diese Begriffe sich ganz von selbst aneignet. Dabei erleidet die Strenge in keiner Weise irgendeine Einbuße, wie dies oft bei populärer Darstellung der Fall ist. Das Werk kann nicht nur Laien empfohlen werden, sondern auch allen unseren Studenten.

E. Hlawka, Wien.

Set Functions. Von *H. Hahn* und *A. Rosenthal.* IX, 324 S. New Mexico: New Mexico Press. 1948.

Als Hans Hahn 1934 unerwartet starb, hinterließ er umfangreiche Ausarbeitungen für die Fortsetzung seiner „Reellen Funktionen", deren erster Band 1932 erschienen war. Arthur Rosenthal, als Verfasser der ausgezeichneten Enzyklopädieartikel über reelle Funktionen dazu wohl wie kein anderer berufen, übernahm 1937 die Bearbeitung und Herausgabe des zweiten Bandes. Da durch die politische Lage die Veröffentlichung bei dem deutschen Verleger des ersten Bandes unmöglich war und auch das geplante Erscheinen des Buches in einem Amsterdamer Verlag (in deutscher Sprache) durch die Kriegsereignisse vereitelt wurde, mußte sich Rosenthal entschließen, das Werk in englischer Sprache als selbständige Monographie erscheinen zu lassen.

So müssen wir uns damit abfinden, neben den vertrauten ersten Band der „Reellen Funktionen" die englisch geschriebenen „Mengenfunktionen" zu stellen, haben aber dafür den großen Vorteil, daß das Werk nun ganz auf der Höhe des heutigen Standes der Forschung steht. Denn Rosenthal hat es in bewundernswerter Weise verstanden, dem Werk den ursprünglichen Charakter der Hahnschen unübertroffen klaren und präzisen Schreibweise zu erhalten und dabei, wie die (sehr ausgiebigen!) Literaturnachweise zeigen, wohl alles, was in den seit Hahns Tod verflossenen Jahren, an wesentlichen Fortschritten erzielt wurde, mit dem Hahnschen Manuskript organisch zu verschmelzen. Sicher hat er dabei viel aus Eigenem hinzugetan, doch kann die Größe dieses Anteils ohne Kenntnis des Hahnschen Manuskripts und der größtenteils noch unerreichbaren Literatur der Kriegsjahre nicht wohl abgeschätzt werden.

Geben wir nun eine Inhaltsübersicht: auf eine Einleitung, in der die wesentlichsten Begriffe über Mengen, topologische und metrische Räume entwickelt werden, folgen fünf große Kapitel, deren Inhalt durch die Überschriften: Addition und totaladditione Mengenfunktionen — Maß — Meßbare Funktionen —

Integration — Differentiation genügend gekennzeichnet ist. Die sorgfältige Unterteilung der Kapitel läßt sich mit Hilfe des ansführlichen Inhaltsverzeichnisses leicht übersehen. Ein umfangreiches Sachregister und ein Verzeichnis der verwendeten Bezeichnungen und Symbole erleichtern die Benutzung des Buches.

Einzelheiten aus dem Inhalt hervorzuheben, hat wenig Zweck, weil die Fülle des Gebotenen zu groß ist, um eine doch willkürliche Auswahl zu rechtfertigen. Doch sei immerhin auf die Theorie der „singulären" und regulären Mengen und Mengenfunktionen (im 1. Kapitel) verwiesen, die die Lehre von den stetigen ($\varphi = 0$ für abzählbare Mengen) und ψ-stetigen ($\varphi = 0$, wenn $\psi = 0$) Mengenfunktionen einem gemeinsamen Gesichtspunkt unterordnet und auch zur Theorie der „Atome" (eine Menge A wird „φ-Atom" genannt, wenn auf den Teilmengen von A φ nur die Werte 0 und $\varphi(A)$ annehmen kann) in Beziehnung steht, ferner auf die Darstellung der Deriviertentheorie in Kap. V., die die um den Vitalischen Überdeckungsnetz sich gruppierenden Tatsachen vom allgemeinsten Standpunkt aus behandelt.

Bezüglich der Darstellungsweise sei betont, daß stets vom allgemeinsten Fall beliebiger Mengensysteme ausgegangen wird, wobei aber die wichtigen Spezialisierungen auf topologische und metrische Räume, sowie auf den euklidischen Raum, dort, wo sie wesentlich über den allgemeinen Rahmen hinausführen, durchaus zu ihrem Recht kommen.

Man legt das Buch mit dem Bedauern aus der Hand, daß diese umfassende und einheitliche Darstellung des wichtigen Stoffgebietes unter den jetzigen Verhältnissen wohl noch lange eine Rarität in unseren Büchereien bleiben wird.

J. Radon, Wien

Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen. Von *L. Locher-Ernst*. 594 S. Basel: E. Birkhäuser. 1948. sfr. 48.—.

Das Buch bringt außer Analysis noch eine Einführung in die analytische Geometrie bis zu den Kurven zweiter Ordnung. Besonderer Wert wurde auf numerische und graphische Methoden gelegt. Die Sätze werden durch eine Fülle von Beispielen erläutert. Hervorzuheben sind die zahlreichen Figuren und die praktischen Winke, die für den zweckmäßigen Gebrauch der entwickelten Methoden angegeben werden. Auf Fehlerabschätzungen wird sorgsam eingegangen. Für diejenigen, die Mathematik auf Naturwissenschaft und Technik anzuwenden haben, ist das Buch, dessen Darstellung sehr ausführlich ist, hervorragend geeignet. Auch der reine Mathematiker wird aus ihm Nutzen ziehen können. Mathematische Strenge darf man nicht immer erwarten, obwohl der Verfasser sich oft bemüht hat, die Sätze, die zuerst plausibel gemacht werden, exakt zu unterbauen. Zum Beispiel wird die Differential- und Integralrechnung zuerst formal für Polynome entwickelt, dann in heuristischer Weise für allgemeine Funktionen. Erst zum Schluß wird der Grenzbegriff entwickelt. Auch auf die Weierstraßsche nicht differenzierbare Funktion wird kurz eingegangen. Aus dem Bestreben heraus, die Begriffe recht nahe zu bringen, geht der Verfasser, auch wenn man noch so weitherzig ist, oft zu weit. Ich denke an die Definition des Differentials und die anschließenden Sätze. Trotzdem kann das Buch nachdrücklichst empfohlen werden. Es soll nun eine kurze Inhaltsübersicht gegeben werden:

Das 1. und 2. Kapitel bringt die Koordinatensysteme, Gerade und Winkel. Das 3. bringt die Differential- und Integralrechnung für Polynome mit ausführlicher Behandlung der Interpolation. Das 4. und 5. Kapitel bringt die

Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der graphischen und numerischen Methoden, darunter die harmonische Analyse. Im 6. Kapitel werden die ebenen Kurven behandelt in Verbindung mit der kinematischen Geometrie.

Den Beschluß bilden einfache Typen von Differentialgleichungen, ausführliche historische Anmerkungen verfaßt von *J. O. Fleckenstein*, numerische Auflösung von Gleichungen, eine Formelsammlung und zwei Tafeln über Exponential-, Hyperbelfunktionen und elliptische Integrale.

E. Hlawka, Wien.

Equazioni differenziali. Von *F. Tricomi*. Mit 24 Textabb., 313 S. Turin: G. Einaudi. 1948.

Der bekannte italienische Analytiker *Francesco Tricomi*, der gegenwärtig — auf Einladung des Institute of Technology, Pasadena — in Kalifornien weilt, bietet in diesem in vorzüglicher Ausstattung erschienenen Lehrbuch eine auf reiche Erfahrung gegründete Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen, die sich durch eine selten klare und verständliche, mit vielen Beispielen illustrierte Darstellung auszeichnet. Trotzdem der Verfasser bewußt darauf verzichtet, die seinem eigenen Forschungsgebiet angehörigen symbolischen Methoden (Laplace-Transformation) darzustellen, weil dies in strenger Form im Rahmen eines einführenden Lehrbuches nicht möglich gewesen wäre, enthält sein Buch doch viele neuartige und interessante Beiträge.

Kurze Inhaltsangabe: 1. Kap. Existenz- und Eindeutigkeitssatz, 2. Kap. Differentialgleichungen 1. Ordnung; 3. Kap. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung; 4. Kap. Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte und Eigenfunktionen; 5. Kap. Die Lösungen im komplexen Gebiet, insbesondere hypergeometrische Differentialgleichung. Anhang: Transformation linearer Differentialgleichungen auf Volterrasche Integralgleichungen und Anwendung dieser Methode zur Ableitung der asymptotischen Formel für die Laguerreschen Polynome.

W. Gröbner, Innsbruck.

Applied Differential Equations. Von *F. E. Relton*. 264 S. London und Glasgow: Blackie & Son. 1948. 20 s.

Das Buch enthält die üblichen Methoden zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und das Einfachste über partielle Differentialgleichungen. Existenzbeweise fehlen mit Absicht. Die Darstellung ist so ausführlich und pädagogisch so meisterhaft, daß das Buch zum Selbststudium hervorragend geeignet ist. Der Leser lernt die Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen nicht bloß kennen, sondern auch anwenden. Das Buch enthält mehr als 400 Beispiele, die teils der Mathematik, teils der Physik und Technik angehören. Viele Beispiele sind durchgerechnet, viele mit Winken zur Auflösung versehen. Da das Buch in erster Linie für den angewandten Mathematiker geschrieben ist, so werden auch graphische und numerische Methoden ausführlich behandelt.

Ich rate den Studierenden wärmstens, das Buch durchzuarbeiten.

N. Hofreiter, Wien.

Lezioni di Geometria Moderna I. Fondamenti di Geometria sopra un Corpo qualsiasi. Von *B. Segre*. IV, 195 S. Bologna: N. Zanichelli. 1948.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die algebraische Geometrie über beliebige Körper zu entwickeln. Der vorliegende erste Band bringt die projektive Geometrie der linearen Mannigfaltigkeiten, während der zweite Band den

algebraischen Mannigfaltigkeiten mit arithmetischen Anwendungen gewidmet sein soll. Der erste Teil des ersten Bandes bringt zunächst die algebraischen Grundlagen in dem Umfange etwa, wie sie in van der Waerden „Moderne Algebra I" entwickelt sind. Besonderes Augenmerk finden die endlichen Körper. Der zweite Teil bringt dann die projektive Geometrie über beliebige Körper, zunächst algebraisch definiert, aber auch vom axiomatischen Standpunkt aus. Hier spielen natürlich die Sätze von Desargues und Pascal die Hauptrolle. (Vgl. z. B. die Werke von Hilbert und Reidemeister über die Grundlagen der Geometrie.) Dann werden die Plückerschen Koordinaten, die Kollineation, Polarität und Nullsystem behandelt. Körper mit Charakteristik 2 erfordern natürlich, vor allem bei Involutionen, eine Sonderbehandlung. Zum Abschluß werden die Geometrien über endliche Körper noch eingehend betrachtet. Die Darstellung ist klar und die Beweise sind leicht zu verfolgen. Man kann auf den zweiten Band gespannt sein.

E. Hlawka, Wien.

Introduzione alla geometria algebrica. Geometria numerativa. Autographierte Vorlesungen von *F. Severi*. 217 S. Rom: Docet Edizioni Universitarie. 1948.

Diese Vorlesungen des führenden italienischen Geometers *Francesco Severi* leiten in die Grundlagen der algebraischen Geometrie ein, und zwar besonders mit Hinblick auf die abzählende Geometrie. Hervorzuheben sind die klaren und strengen Beweisführungen, sowie die große Übersicht über die mannigfachen Probleme dieser Wissenschaft, die zu einem beträchtlichen Teil auf persönlichen Forschungen Severis beruht. Zu den Vorwürfen, welche oftmals gegen die italienische Geometrie erhoben werden, daß sie sich zu sehr auf Anschauung stütze und logische Strenge vermissen lasse, nimmt er von seinem Standpunkt aus Stellung. Die Herstellung eines lückenlosen deduktiven Systems sei immer das anzustrebende Endziel unserer Forschung; aber auch hier dürfe man nicht übertreiben und insbesondere sie nicht völlig von der Anschauung loslösen. Dieselbe Bedeutung, die für den Physiker die instrumentellen Versuche haben, besitzen für den Mathematiker die in seiner inneren Anschauung durchgeführten Gedankenexperimente. Aus der Anschauung erwachsen die Begriffe und Ideen unserer Mathematik, die Loslösung von ihr könnte zur Vertrocknung und zum Skeptizismus führen, was das Ende jeden Fortschrittes bedeuten würde.

Das 1. Kap. entwickelt, von topologischen Grundbegriffen ausgehend, die Begriffe des euklidischen und des projektiven Raumes, sowie der algebraischen Mannigfaltigkeit. Sodann werden im 2. Kap. die algebraischen Grundlagen, und zwar auch die Anfangsbegriffe der abstrakten Algebra und Idealtheorie behandelt. Für die Untersuchung der algebraischen Mannigfaltigkeiten, die ja auch die Punkte mit komplexen Koordinaten umfassen, eignen sich besonders ihre „Riemannschen reellen Abbilder", welche auf dem Begriff der Segreschen Mannigfaltigkeiten aufgebaut sind. Mit ihrer Hilfe gelingt es, die konstruktiven Begriffe der algebraischen Kurventheorie auf höher dimensionale Mannigfaltigkeiten zu übertragen, wie z. B. die „Monodromiegruppe" und der dem Kurvenzweig entsprechende Begriff des „algebraischen Mantels". Das 3. Kap. erörtert die algebraischen Korrespondenzen und die schwierigen Multiplizitätsprobleme, die beim Schnitt algebraischer Mannigfaltigkeiten auftreten. Das letzte Kap. ist schon einem speziellen Problem der abzählenden Geometrie gewidmet, nämlich dem „Prinzip der Abzählung der Parameter" und dem „Kriterium von *Plücker und Clebsch*", welches seinerzeit heuristisch gefunden wurde und bekanntlich zu vielen Fehlschlüssen verleitet hat. An zahlreichen

Beispielen, besonders zur Ermittlung von kanonischen Gleichungen für algebraische Kurven und Flächen, wird die Anwendung dieses Prinzips gezeigt. Man wird mit Interesse der angekündigten Fortsetzung dieser Vorlesungen entgegensehen.

W. Gröbner, Innsbruck.

Fondamenti di geometria algebrica. Autographierte Vorlesungen von *F. Severi*. 172 S. Padova: Cedam. 1948.

Diese im Februar 1947 an der Scuola Normale Superiore in Pisa gehaltenen Vorlesungen enthalten in einer meisterhaften, klaren und übersichtlichen Zusammenfassung die Theorie der algebraischen Kurven und Flächen nach dem modernsten Stand, den sie durch die Forschungen hervorragender italienischer Geometer, vor allem Severis selbst, in den letzten Dezennien erreicht hat. Severi hat seine bahnbrechenden Forschungen auf diesem Gebiete in zahlreichen einzelnen Abhandlungen veröffentlicht, welche schwer zugänglich und in ihrer dem Endziel untergeordneten Bedeutung nicht leicht erkennbar sind. Umsomehr ist es zu begrüßen, daß er in den letzten Jahren dazu übergegangen ist, seine Forschungen in systematisch aufgebauten Werken zusammenhängend darzustellen, wodurch erst die sie beherrschende Idee und die mit ihrer Hilfe erzielten wichtigen Fortschritte klar ins Licht treten. Die klassische algebraische Geometrie (*Noether*, *Clebsch* u. a.) hat die Theorie der algebraischen Kurven auf dem Begriff der *linearen Äquivalenz* von Punktgruppen aufgebaut; die Gesamtheit aller mit einer gegebenen Punktgruppe linear äquivalenten Punktgruppen einer Kurve bilden eine (lineare) *Vollschar*, und dieser Begriff genügt, um die Geometrie auf einer algebraischen Kurve erschöpfend darzustellen. Es war daher das Bestreben naheliegend, in gleicher Weise auch die Geometrie auf einer algebraischen Fläche zu entwickeln. Besonders *Castelnuovo* und *Enriques* haben diesen Versuch so weit als möglich vorgetrieben, aber es zeigte sich dabei immer deutlicher, daß der Begriff der linearen Äquivalenz hier nicht mehr ausreicht. Da tat Severi den entscheidenden Schritt, indem er den Begriff der *algebraischen Äquivalenz* einführte und diesen nicht nur auf Mannigfaltigkeiten der jeweils höchsten Dimension, sondern auch auf solche geringerer Dimension ausdehnte, z. B. auf Punktegruppen auf einer algebraischen Fläche. Eine ausführliche mit vollständigen Beweisen gestützte Darstellung dieser Theorie gibt Severi in dem Werke „*Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*", dessen 1. Band im Jahre 1942 (415 S. Rom, Edizioni Cremonese) erschienen ist und dessen 2. Band für die nächste Zeit angekündigt wurde. Damit ist es Severi gelungen, die Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in so großer Allgemeinheit und logischen Exaktheit aufzubauen, daß die Möglichkeit, seine Theorie auf das rein abstrakte Gebiet der Idealtheorie zu übertragen, in greifbare Nähe gerückt erscheint.

W. Gröbner, Innsbruck.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von *E. Müller* † und *E. Kruppa*. Fünfte, ergänzte Auflage. Mit 375 Textabb., X, 404 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. S 60.—, sfr. 26.—, $ 6.—.

Die fünfte Auflage des Lehrbuches ist größtenteils ein photomechanischer Abdruck der vierten Auflage. Sie unterscheidet sich aber durch einige Ergänzungen. So wurde der frühere § 124 (Umkehraufgaben, Photogrammetrie) zu einem eigenen Kapitel: „Geometrische Grundbegriffe der Photogrammetrie"

ergänzt. Es ist eine gute Vorschulung zum eingehenden Studium der Photogrammetrie, die auf geometrischen Grundlagen ruht. Im Anhang wurde die Konstruktion eines Schrägrisses mittels des Einschneideverfahrens von L. Eckhart und eine Note über die Konstruktion des normalaxonometrischen Dreibeins für die Verkürzungsverhältnisse 1 : ½ : 1 aufgenommen.

Das Lehrbuch der darstellenden Geometrie von Müller-Kruppa wird allgemein so hochgeschätzt, daß jedes Lob in einer Rezension überflüssig ist.

N. Hofreiter, Wien.

Statistics. Von *L. H. C. Tippett*. 184 S. Oxford: University Press. 1947. 5 s.

Das Büchlein wendet sich an einen breiten Leserkreis und verzichtet demgemäß auf jeden mathematischen Apparat. Begriffe wie Häufigkeitsverteilung, Mittelwert, Korrelation usw. werden an Beispielen entwickelt, ohne formelmäßig scharf gefaßt zu werden. Der Autor schätzt auch die zahlenmäßige Erfassuug eines Sachverhaltes nicht allzu hoch ein und weist darauf hin, daß z. B. in der Biologie ein quantitatives Erfassen von Zusammenhängen bedeutsamer sein kann, als deren numerische Beschreibung. Da sich das Buch hauptsächlich an den Nichtmathematiker wendet, ist das Literaturverzeichnis sehr vorsichtig zusammengestellt und umfaßt nur einige wenige Angaben. Der Verfasser will den Leser weniger mit den Methoden der Statistik im einzelnen vertraut machen, als ihn in den Geist dieser Disziplin im allgemeinen einführen. Diesem Zweck wird das Buch wohl in hohem Maße gerecht, wie schon rein äußerlich die Tatsache beweist, daß nach dem erstmaligen Erscheinen 1943 in knappen Abständen (44, 45, 47) Neudrucke erfolgen mußten.

L. Schmetterer, Wien.

Die Idee der Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt von *H. Thirring*. Dritte verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 8 Textabb., VI, 168 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. S 28.—, sfr. 12.—, $ 2.80.

Das bekannte Werk wurde gegenüber den früheren Auflagen (Mh. Math. Phs. 33 (1923), 55) nur um einen Abschnitt über Atomenergie erweitert. Möge sich auch die neue Auflage einer ebenso großen Beliebtheit erfreuen, wie dies bei den früheren Auflagen der Fall war. Jeder, der das Wesen der Relativitätstheorie erfassen will, greife zu diesem Buch!

E. Hlawka, Wien.

A. C. Network Analysis by Symbolic Algebra. Von *W. H. Miller*. Mit 36 Textabb., II, 41 S. Manchester: Classifax Publications. 1948. 4 s. net.

Das Büchlein ist als leicht faßliche Einführung für den in der Praxis stehenden Techniker abgefaßt. Es vermittelt die Grundlagen zur Berechnung des Stromverlaufes in Leitungsgebilden mit Wirkwiderständen, Induktivitäten und Kapazitäten mit Hilfe komplexer Größen. Nach Erläuterung der Grundbegriffe werden zuerst die einfachen Konfigurationen komplexer Widerstände behandelt. Zu komplizierteren Gebilden fortschreitend, zeigt der Verfasser sodann die Transformation vermaschter Netze in wirkungsgleiche Anordnungen mit einfacher Reihen- und Parallelschaltung, die sich mit elementaren Mitteln berechnen lassen. Viele Zahlenbeispiele und Schaltskizzen machen es dem Studierenden leicht, das Erlernte gründlich zu verstehen und sofort praktisch anzuwenden. Auf die Behandlung höherer Probleme der Netzberechnung, beispielsweise die

Theorie mehrfach angespeister Maschennetze, ist verzichtet, da sich solche Aufgaben mit den Vorkenntnissen, die beim Leser vorausgesetzt sind, nicht lösen lassen. Für die meisten Fälle der elektrotechnischen Praxis, vor allem der Schwachstromtechnik, ist jedoch der Umfang des vermittelten Wissens völlig ausreichend.

Das Buch wendet sich in erster Linie an einen Leserkreis, dessen mathematisches und elektrotechnisches Fachwissen etwa dem der Absolventen unserer höheren techn. Lehranstalten entspricht. Sehr zweckmäßig und nachahmenswert ist es, daß der Verlag die zum Gebrauch seiner Fachbücher vorausgesetzten Vorkenntnisse jeweils am Titelblatt vermerkt. Im vorliegenden Falle sind dies die Kenntnisse der elektrotechnischen Grundlagen und der Zeigerdiagramme sowie das Rechnen mit komplexen Größen an sich. Ein besonderer Vorzug ist die leicht faßliche Darstellung, die jedoch auf mathematische und physikalische Exaktheit keinesfalls verzichtet. Für den deutschsprachigen Leser ist es ferner sehr angenehm, daß das Buch in einer äußerst klaren Sprache mit einfachem Satzbau abgefaßt ist, sodaß die in unseren Mittelschulen vermittelten Kenntnisse der englischen Sprache völlig ausreichen, um das Buch flüssig zu lesen.

O. Plechl, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung

Von

Dr. phil. **Adalbert Duschek**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Wien

und

Dr. techn. **August Hochrainer**, Direktions-Assistent der Elin-A. G. in Wien

In drei Teilen

I. Teil: **Tensoralgebra**

Zweite Auflage. Mit 26 Textabbildungen. VI, 129 Seiten. 1948
S 27.—, sfr. 12.—, $ 2.70

II. Teil: **Tensoranalysis**
Erscheint im Frühjahr 1949

III. Teil: **Anwendungen in Physik und Technik**
Erscheint Ende 1949

Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen

Von

Prof. Dr. **P. Gombás**
Direktor des physikalischen Instituts der Universität für technische Wissenschaften in Budapest

Mit 59 Textabbildungen. VIII, 406 Seiten 1949
S 186.—, sfr. 80.—, $ 18.60
Geb. S 195.—, sfr. 85.—, $ 19.50

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria